

## **Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung beim eindimensionalen Stoß zweier Kugeln: Impressionen aus dem Praktikumsalltag**

**C. Hanisch, F. Hofmann, M. Ziese**

Physikalisches Grundpraktikum, Fakultät für Physik und Geowissenschaften, Universität Leipzig,  
D-04103 Leipzig, Germany

[Christian.Hanisch@uni-leipzig.de](mailto:Christian.Hanisch@uni-leipzig.de), [florian.hofmann@uni-leipzig.de](mailto:florian.hofmann@uni-leipzig.de), [ziese@physik.uni-leipzig.de](mailto:ziese@physik.uni-leipzig.de)

(Eingegangen: 03.05.2017; Angenommen: 28.03.2018)

### **Kurzfassung**

In einem Videoanalyseexperiment wurde der Stoß einer rollenden mit einer ruhenden Kugel untersucht. Da der Kraftstoß während der Kollision den Linearimpuls zwischen den Kugeln transferiert, aber kein entsprechender Drehmomentstoß auftritt, erfüllen die Kugeln nach dem Stoß die Rollbedingungen nicht. Die Kugeln werden daher durch Reibung entweder beschleunigt oder verzögert. Die Analyse des Stoßes liefert Daten zum Verhältnis der End- und Anfangsgeschwindigkeiten, zum Elastizitätsgrad des Stoßes, zum Reibungskoeffizienten und zum Anteil des beim Stoß übertragenen Drehimpulses. Der Praktikumserfolg der Studierenden bei diesem Versuch wird kurz diskutiert.

### **Abstract**

The linear collision between a rolling ball and a ball at rest was studied in a video analysis experiment. Since the impulse during the collision transferred the linear momentum between the balls, but since there is no corresponding angular impulse, the rolling condition was not valid for the balls directly after the collision. One of the balls was accelerated, the other decelerated by the friction force. The analysis of the collision yielded data on the ratio between initial and final speeds, the degree of elasticity of the collision, the friction coefficient and the fraction of the transferred angular momentum. The students' success in performing this experiment in the basic physics laboratory is briefly discussed.

### **1. Einleitung**

Im Jahr 2012 wurde im Physikalischen Grundpraktikum der Fakultät für Physik und Geowissenschaften, Universität Leipzig, ein Versuch zur Videoanalyse einfacher kinematischer und dynamischer Prozesse eingeführt. Die Videoanalyse ist ein universelles Werkzeug für die Untersuchung kinematischer und dynamischer Prozesse. Sie wurde bereits auf eine Fülle unterschiedlicher Bewegungsvorgänge angewendet [1-18]. In der ursprünglichen Konzeption sollten die Studierenden vier Experimente bearbeiten: ein- und zweidimensionaler Stoß zweier Kugeln, freier Fall sowie Bewegung auf einer Brachistochrone. Innerhalb der Praktikumszeit von vier Stunden sollten diese Experimente durchgeführt und analysiert werden, so dass das Abtestat gleich am Ende des Praktikumsstags erfolgen konnte. Um die Videobearbeitung einfach zu gestalten, wurde eine Videoanalysesoftware mit grundlegenden Funktionen entwickelt.

Dieser Versuch findet im Mechanikpraktikum in der vorlesungsfreien Zeit am Ende des ersten Semesters statt. In der Vorlesungszeit erwerben die Studierenden im Modul Experimentalphysik 1 die experimentellphysikalischen Grundkenntnisse zur Mechanik;

im Modul Grundpraktikum 1 gibt es eine Vorlesungs- und Seminarkomponente, in der während der Vorlesungszeit Kompetenzen zur Datenanalyse vermittelt werden.

Die Zielstellung des Versuchs liegt nicht in der Vermittlung von Kenntnissen in der Videoanalyse. Als wesentliches Ziel sehen wir die eigenständige Anwendung mathematischer Modelle auf die Beschreibung einfacher physikalischer Prozesse an. Die Praktikumsunterlagen [19] sind daher nicht als Versuchsanleitung mit starrer Schrittfolge verfasst, sondern formulieren einerseits allgemeine Aufgaben und stellen andererseits einige spezielle mathematische Modelle vor. Die Verbindung zwischen Aufgabenstellung, Experiment, Datenanalyse des Experiments und Modellbeschreibung muss von den Studierenden selbst entwickelt werden. Dies erfordert selbstständige Leistungen zur Analyse einzelner physikalischer Prozesse sowie zur Synthese der einzelnen Daten in einer kohärenten Modellbeschreibung. Dies sollte möglichst schon während der Praktikumsvorbereitung begonnen werden.

In der Literatur wurden ein- und zweidimensionale Stoßprozesse zur Veranschaulichung der Erhaltungssätze von Energie und Impuls verwendet [1, 8,

10, 20]. Darüber hinaus findet man Untersuchungen von zweidimensionalen Stoßprozessen beim Billard [21-23], die u. a. den Einfluss von Reibung und den Übergang zwischen Gleit- und Rollphasen analysieren. Für ein Mechanik-Praktikum im ersten Semester ist das bereits sehr komplex. In dieser Arbeit möchten wir daher die Konzeption des Experiments am Beispiel des eindimensionalen Stoßes zweier Kugeln näher beleuchten. Eine ähnliche Untersuchung findet man in [24], allerdings ohne Verwendung von Videoanalysen. Den symmetrischen Stoß haben wir in [25] studiert.

## 2. VideoanalySELabor

Das VideoanalySELabor bietet Platz für vier Arbeitsgruppen zu je zwei Studierenden. Pro Platz bestehen die Arbeitsmittel aus einer Digitalkamera auf einem Kameraständer, einer LED-Lampe vor einem Projektionsschirm sowie einem Laptop mit VideoanalySESoftware und mathematischer Software (Origin und SciDavis). Die vier Experimentierstationen:

- (1) drei schiefe Ebenen (gerade schiefe Ebene, Brachistochrone, konvexer Bogen);
- (2) freier Fall einer Kugel und ballistischer Fall eines Hohlkegels;
- (3) eindimensionaler Stoß zweier Kugeln auf einer Schiene und
- (4) zweidimensionaler Stoß von zwei oder mehreren Kugeln auf einem Tisch,

werden gemeinsam genutzt. Bei der Digitalkamera handelt es sich um eine handelsübliche Kamera mit 16.1 Megapixeln (px), einem 8-fachen optischen Zoom, und Filmmodi mit einer Auflösung von 1920 × 1080 px<sup>2</sup> bei einer Bildrate von 30 fps (frames per second) bis hinunter zu einer Auflösung von 512 × 384 px<sup>2</sup> bei einer Bildrate von 240 fps.

Die VideoanalySESoftware wurde im Physikalischen Grundpraktikum in Leipzig entwickelt und hat die folgenden Merkmale:

- einfaches Nutzer-Interface ohne komplexe Menüführung;
- manuelle und automatische Videoanalysetechniken, entsprechend der Vorkenntnisse der Nutzer und der Komplexität der Aufgabe;
- Abstandskalibrierung, beliebige Wahl von Koordinatenursprung und Orientierung des Koordinatensystems;
- Farbanpassung (Gamma, Kontrast, Helligkeit) zur Detektionsverbesserung bei Videos mit niedrigem Kontrast;
- Hintergrundentfernung durch pixelweise Division mit einem Referenzframe und folgender Multiplikation der Farbkanäle mit 255;
- Anpassung der Suchempfindlichkeit und Gewichtung der Suche nach Form oder Farbe;
- Suchfunktion für bis zu vier Objekte in einer Videosequenz (erweiterbar);

- im Fall von Videos guter Qualität Detektion mit Sub-Pixel-Genauigkeit möglich (z. B. ruhende Kugel, ±0.3 px bei 240 fps und 512×384 px<sup>2</sup> Auflösung);
- Umrechnung zwischen Labor- und Schwerpunktskoordinaten.

Die Studierenden filmen die oben genannten kinematischen Abläufe und optimieren die Videos im Hinblick auf Helligkeit, Kontrast und Bildrate. Anschließend werden die Positionskoordinaten der Objekte mittels VideoanalySESoftware als Funktion der Zeit bestimmt; die Daten werden exportiert und mittels mathematischer Software ausgewertet.

## 3. Experiment und Theorie

### 3.1. Vorkenntnisse

*Anforderung: Wiederholen der Vorkenntnisse aus dem Modul Experimentalphysik 1*

Wir erwarten, dass die Studierenden die Erhaltungssätze kennen und mit dem eindimensionalen elastischen Stoß vertraut sind. Impuls- und Energieerhaltung liefern:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= mv_1 + mv_2 \\ &= p'_1 + p'_2 = mv'_1 + mv'_2 \end{aligned} \quad \{1\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \\ = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}I\omega_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}I\omega_2'^2 \end{aligned} \quad \{2\}$$

Die Kugeln haben identische Massen  $m$ , Radien  $r$  und Trägheitsmomente  $I = \frac{2}{5}mr^2$ . Der Impuls ist mit  $p$ , die Geschwindigkeit mit  $v$ , die Winkelgeschwindigkeit mit  $\omega$  bezeichnet, die Kugeln werden durch die Indizes „1“ und „2“ unterschieden, physikalische Größen nach dem Stoß sind mit einem Strich versehen.

Falls die Kugeln stets rollen oder stets gleiten, haben die beiden vorstehenden Gleichungen die triviale Lösung  $v'_1 = v_1, v'_2 = v_2$ , d. h. die Kugeln laufen aneinander vorbei. Hier ist die Stoßlösung relevant:  $v'_1 = v_2, v'_2 = v_1$ , d. h. die Kugeln tauschen ihre Geschwindigkeiten aus und bewegen sich nach dem Stoß mit konstanter Geschwindigkeit fort. Diese Voraussage gilt es nun zu überprüfen.

### 3.2. Experiment

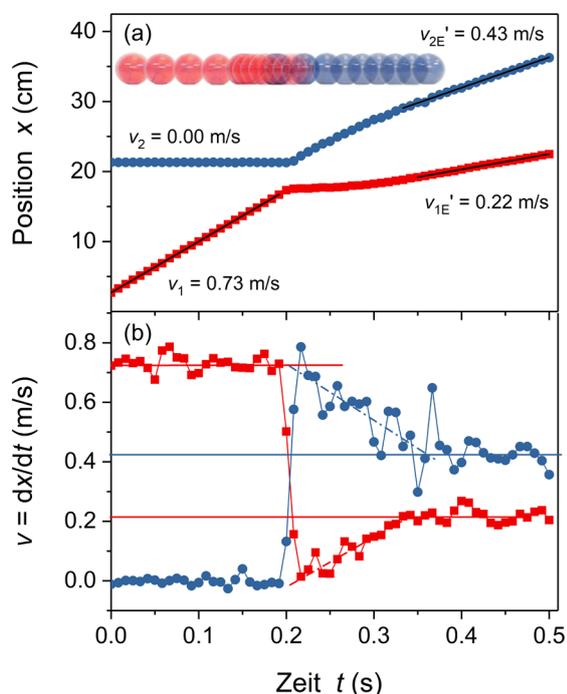
*Anforderung: Nach Einweisung durch den Versuchsbetreuer, Aufnahme des Videos, Bestimmung der Ortskurven der zwei Kugeln mittels der VideoanalySESoftware.*

Im Experiment wird die Kollision zwischen zwei Kugeln, die auf einer gefrästen Holzbahn laufen, gefilmt. Kugel 2 (Abb. 1 blau) ist zunächst in Ruhe, Kugel 1 (Abb. 1 rot) läuft von links mit konstanter Geschwindigkeit  $v_1 = (0.73 \pm 0.01)$  m/s ein. Abb. 1(a) zeigt die Koordinaten der beiden Kugeln. Der Stoß findet bei  $t_A = 0.21$  s statt. Nach dem Stoß ist die rote Kugel nicht in Ruhe, in den ersten 0.15 s

nach dem Stoß sind die Orts-Zeit-Trajektorien gekrümmt, erst danach laufen die Kugeln mit konstanten Geschwindigkeiten aus. Die Summe der auslaufenden Geschwindigkeiten  $v_1' + v_2' = (0.65 \pm 0.02) \text{ m/s}$  ist signifikant kleiner als die Summe der einlaufenden Geschwindigkeiten.

Die numerische Differentiation der Daten in Abb. 1(b) vermittelt einen ersten Eindruck der kinematischen Prozesse. Direkt nach dem Stoß haben die Kugeln in der Tat die Geschwindigkeiten ausgetauscht. Dann findet jedoch eine Beschleunigungsphase mit konstanter Beschleunigung statt, Kugel 1 wird beschleunigt, Kugel 2 wird verzögert.

Die im vorigen Abschnitt formulierte Vorhersage ist in wesentlichen Teilen falsch. Es muss eine weitere Modellbildung erfolgen, die mit den Daten abzugleichen ist.



**Abb. 1:** (a) Positionskoordinaten ( $x$ ) der beiden Kugeln als Funktion der Zeit. Die schwarzen Linien sind Anpassungen an die Daten in den entsprechenden Zeitbereichen; die angegebenen Geschwindigkeiten wurden aus den Steigungen ermittelt.

(b) Geschwindigkeiten der Kugeln, bestimmt durch numerische Differentiation. Die durchgezogenen Linien zeigen lediglich den Trend der Daten an.

### 3.3. Zwischenspiel: Rollradius

Zitat Student P.: „Im Praktikum geht es stets um Details. Ich habe lieber das große Ganze im Blick.“

Anforderung: Einlassen auf Details des experimentellen Aufbaus, um eine möglichst genaue Beschreibung des Bewegungsablaufs modellieren zu können.

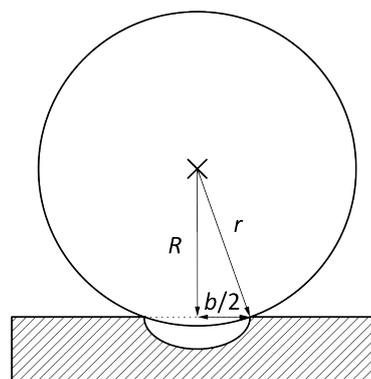
Bevor die Modellbildung diskutiert wird, soll hier noch der Rollradius  $R$  eingeführt werden. Die Schiene ist gefräst, die Schienenbreite ist  $b$ . Die Kugel

berührt die Schiene idealerweise in zwei Punkten, siehe Abb. 2, so dass der Rollradius  $R$  durch

$$R = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \{3\}$$

gegeben ist. Bei einem Kugelradius  $r = (19.00 \pm 0.05) \text{ mm}$  und einer Schienenbreite  $b = (18.00 \pm 0.05) \text{ mm}$  erhält man  $R = (16.73 \pm 0.06) \text{ mm}$ . Die Rollbedingung lautet

$$v = R\omega. \quad \{4\}$$



**Abb. 2:** Querschnitt einer Kugel auf der Holzschiene.

### 3.4. Modellbildung

Anforderung: Auffinden der korrekten Elemente für die Modellbildung im Theorieteil der Praktikumsanleitung. Eigenständiges Verstehen dieser Elemente. Eigenständige analytische Leistung: Entwicklung einer Methode, um die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten aus den Daten zu bestimmen.

Das experimentelle Ergebnis zeigt, dass nach dem Stoß eine Beschleunigungsphase auftritt. Diese kennzeichnen wir im Folgenden durch ihre Anfangsgeschwindigkeit (Index „A“), die Beschleunigung  $a$ , sowie die Endgeschwindigkeit (Index „E“), die gleichzeitig auch die Auslaufgeschwindigkeit der Kugeln ist. Die Videoanalyse in Abb. 1 legt nahe, dass die Impulse durch den Kraftstoß bei der Kollision ausgetauscht werden. Sie liefert jedoch keinen Aufschluss über die Winkelgeschwindigkeiten. Wir nehmen zunächst an, dass während des Stoßes kein Drehmoment wirkt. Daher kann man die Erhaltungssätze für die Impulserhaltung in Gl. (1) sowie die Drehimpulserhaltung um die horizontale Achse senkrecht zur Bahnrichtung

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= I\omega_1 + I\omega_2 \\ &= L_1' + L_2' = I\omega_1' + I\omega_2' \end{aligned} \quad \{5\}$$

direkt nach dem Stoß folgendermaßen lösen:

$$v_{1A}' = v_2 \quad \{6\}$$

$$v_{2A}' = v_1 \quad \{7\}$$

$$\omega_{1A}' = \omega_1 = v_1 / R \quad \{8\}$$

$$\omega_{2A}' = \omega_2 = v_2 / R \quad \{9\}$$

Nach dem Stoß ist die Rollbedingung jedoch nicht mehr erfüllt, d. h. Kugel 1 rotiert auf der Stelle und

wird durch die Reibungskraft  $F_R$  beschleunigt, während Kugel 2 gleitet, durch Reibung verzögert wird und zu rotieren beginnt. Während der Beschleunigungsphase gelten mit der Reibungskraft

$$F_R = -\mu mg \quad \{10\}$$

die Bewegungsgleichungen [26]

$$mv' = \pm \mu mg \quad \{11\}$$

$$I\dot{\omega}' = \frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}' = \mp R\mu mg \quad \{12\}$$

Das obere Vorzeichen beschreibt die stoßende Kugel 1, das untere die gestoßene Kugel 2. Da die Kugel die Bahn nur an zwei Punkten berührt, ist der effektive Reibungskoeffizient  $\mu$  von Roll- und Kugelradius abhängig:  $\mu = \mu_G (r/R)$ , wobei  $\mu_G$  den Koeffizienten der Gleitreibung bezeichnet [25].

Integration der Gleichungen (11) und (12) liefert

$$v'_1 = \mu gt \quad \{13\}$$

$$R\omega'_1 = v_1 - \frac{5R^2}{2r^2} \mu gt \quad \{14\}$$

$$v'_2 = v_1 - \mu gt \quad \{15\}$$

$$R\omega'_2 = \frac{5R^2}{2r^2} \mu gt. \quad \{16\}$$

Die Beschleunigungsphase ist nach der Zeit

$$t_B = \frac{1}{\mu g} \frac{2r^2}{2r^2 + 5R^2} v_1 \quad \{17\}$$

beendet, wenn die Rollbedingungen

$$v'_1 = R\omega'_1, \quad v'_2 = R\omega'_2 \quad \{18\}$$

wieder erfüllt sind. Nach der Beschleunigungsphase bewegen sich die Kugeln mit den konstanten Geschwindigkeiten

$$v'_{1E} = \frac{2r^2}{2r^2 + 5R^2} v_1, \quad \{19\}$$

$$v'_{2E} = \frac{5r^2}{5R^2 + 2r^2} v_1. \quad \{20\}$$

Die experimentellen Werte für die Geschwindigkeitsverhältnisse sind  $v'_{1E}/v_1 = (0.30 \pm 0.03)$  und  $v'_{2E}/v_1 = (0.59 \pm 0.03)$ . Die Gleichungen (19) und (20) ergeben die theoretischen Werte  $v'_{1E}/v_1 = (0.34 \pm 0.00)$  und  $v'_{2E}/v_1 = (0.66 \pm 0.00)$ . Dieser Vergleich legt zwei Schlussfolgerungen nahe: (a) Die in diesem Abschnitt durchgeführte Modellbildung kann die experimentellen Befunde, insbesondere die Nachbeschleunigung der Kugeln nach dem Stoß, erklären. (b) Die berechneten Geschwindigkeitsverhältnisse, Gleichungen (19) und (20), sind größer als die experimentellen Werte und liegen im Bereich der zweifachen bzw. dreifachen Standardabweichung. Dies könnte darauf hinweisen, dass

es mindestens noch eine wesentliche Idealisierung im Modell gibt.

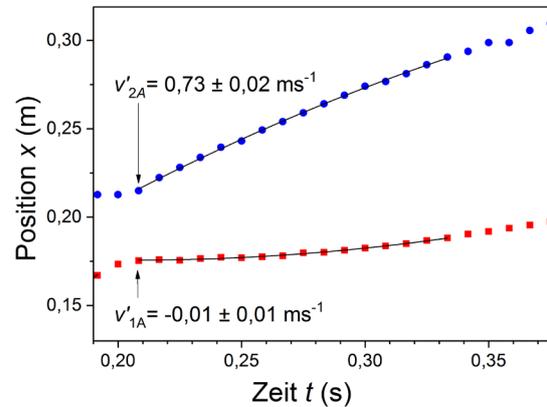
### 3.5. Abweichungen: Ist der Stoß wirklich elastisch?

*Anforderung: Reflexion des Modells: Entwickeln der Fragestellung zur Überprüfung der Elastizität des Stoßes. Selbstständige Leistung: Entwicklung einer analytischen Methode, um die Anfangsgeschwindigkeiten direkt nach dem Stoß aus den Daten zu bestimmen.*

Bisher wurde lediglich angenommen, dass der Stoß elastisch ist. Diese Annahme ist experimentell überprüfbar, indem die Anfangsgeschwindigkeit  $v'_{2A}$  der gestoßenen Kugel bestimmt und mit der Geschwindigkeit  $v_1$  der einlaufenden Kugel verglichen wird.  $v_1 = (0.73 \pm 0.01)$  m/s wurde durch lineare Anpassung der Koordinate der Kugel 1 für  $0 < t < 0.18$  s bestimmt. Der Stoß fand zur Zeit  $t_A = 0.21$  s statt. Nach dem Stoß bewegten sich die Kugeln beschleunigt mit der Beschleunigung  $a$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v'_{iA}$  ( $i = 1, 2$ ), d. h. die Positionen  $x_i$  der Kugeln waren direkt nach dem Stoß durch

$$x_i = \pm \frac{a}{2} (t - t_A)^2 + v'_{iA} (t - t_A) + x_{iA} \quad \{21\}$$

gegeben (positives Vorzeichen für Kugel 1, negatives für Kugel 2).  $x_{iA}$  bezeichnet den Ort der Kugel  $i$  zum Zeitpunkt des Stoßes.



**Abb. 3:** Analyse der beschleunigten Bewegung nach dem Stoß. Die durchgezogenen Linien sind Anpassungen von Gl. (21) an die Daten. Die Anfangsgeschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß sind angegeben.

$v'_{2A} = (0.73 \pm 0.02)$  m/s wurde durch Fit der Funktion (21) an die Koordinate der Kugel 2 für  $0.21 < t < 0.33$  s bestimmt, siehe Abb. 3. Das Verhältnis  $v'_{2A}/v_1 = (1.00 \pm 0.03)$ , d. h. ein Verlust kinetischer Energie während des Stoßes lässt sich innerhalb der Messgenauigkeit nicht nachweisen.

### 3.6. Abweichungen: Einfluss der Rollreibung?

*Anforderung: Reflexion des Modells: Entwickeln der Idee zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten. Eigenständige Leistung: Entwicklung einer analyti-*

schen Methode, um die Beschleunigungen aus den Daten zu bestimmen.

Die Anpassungen der  $x(t)$ -Kurven mit parabolischen Funktionen in den Bereichen  $0 < t < 0.2$  s und  $t > 0.4$  s liefern einen Beschleunigungswert  $a = (0.2 \pm 0.2)$  m/s<sup>2</sup>. Dies entspricht einer Obergrenze für den Rollreibungskoeffizienten von  $\mu_R/R < 0.02$ . Eine systematische Verfälschung der Geschwindigkeitswerte durch Vernachlässigung der Rollreibung ist nicht erkennbar. Im Beschleunigungsbereich  $0.21$  s  $< t < 0.33$  s erhält man eine Beschleunigung  $a_R = (1.6 \pm 0.1)$  m/s<sup>2</sup>; diese entspricht einem Reibungskoeffizienten  $\mu = (0.16 \pm 0.01)$ . Mit Gl. (17) und der Abschätzung  $t_B = 0.15$  s, siehe Abb. 1(b), erhält man  $\mu = (0.17 \pm 0.01)$ . Dies ist der Reibungskoeffizient, wenn die Rollbedingung nicht mehr gilt. Der Gleitreibungskoeffizient ist dann  $\mu_G = (R/r) \mu = (0.14 \pm 0.01)$ .

### 3.7. Energiebilanz

*Anforderung: Reflexion zur Energiedissipation während des Prozesses.*

Es ist instruktiv, die Energiebilanz des Prozesses aufzustellen, um zu sehen, wie effektiv der Beschleunigungsprozess ist. In diesem Abschnitt wird das Trägheitsmoment als  $I = cmr^2$  geschrieben, um die Ergebnisse leicht verallgemeinern zu können.

Die Energie der einlaufenden Kugel ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1kin} + E_{1rot} \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}cmr^2\omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m\frac{R^2 + cr^2}{R^2}v_1^2. \end{aligned} \quad \{22\}$$

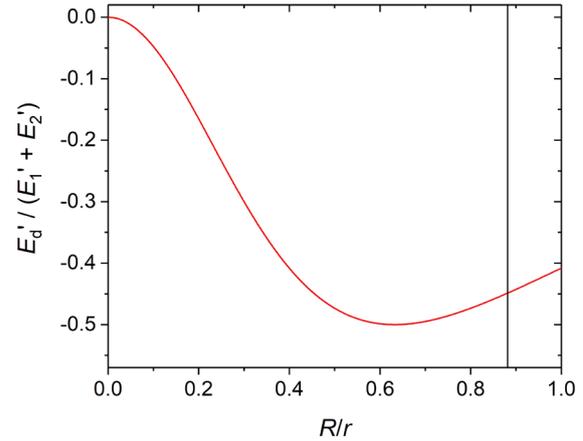
Der Energieverlust, den die Kugeln nach dem Stoß durch Reibung während der Beschleunigungsphase erleiden, ist

$$\begin{aligned} \Delta E'_1 &= \frac{1}{2}m\frac{R^2 + cr^2}{R^2}v_{1E}'^2 - \frac{1}{2}m\frac{cr^2}{R^2}v_{2A}'^2 = \\ \Delta E'_2 &= \frac{1}{2}m\frac{R^2 + cr^2}{R^2}v_{2E}'^2 - \frac{1}{2}mv_{2A}'^2 = \\ &= \frac{1}{2}E'_{diss} \\ &= -\frac{1}{2}m\frac{cr^2}{R^2 + cr^2}v_{2A}'^2. \end{aligned} \quad \{23\}$$

Der relative Energieverlust, bezogen auf die Energie der Kugeln direkt nach dem Stoß, ist dann durch

$$E'_d = \frac{E'_{diss}}{E'_1 + E'_2} = -\frac{2c\left(\frac{R}{r}\right)^2}{\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 + c\right)^2} \quad \{24\}$$

gegeben. Die Funktion  $E'_d$  ist als Funktion des normierten Rollradius  $R/r$  in Abb. 4 dargestellt. Der Energieverlust durch Reibung ist maximal, wenn  $R = c^{1/2}r = 0.6325r$  ist. Im hier vorliegenden Fall ist  $R/r = 0.8816$  und der Energieverlust ist immer noch beträchtlich. Experimentell beträgt der relative Energieverlust  $E'_d = (-52.4 \pm 4)$  % im Vergleich zum theoretischen Wert von  $E'_d = -44.9$  %. Diese Zahlen bestätigen jedoch nur die Diskrepanzen zwischen den experimentellen und theoretischen Werten der Endgeschwindigkeiten in Abschnitt 3.4.



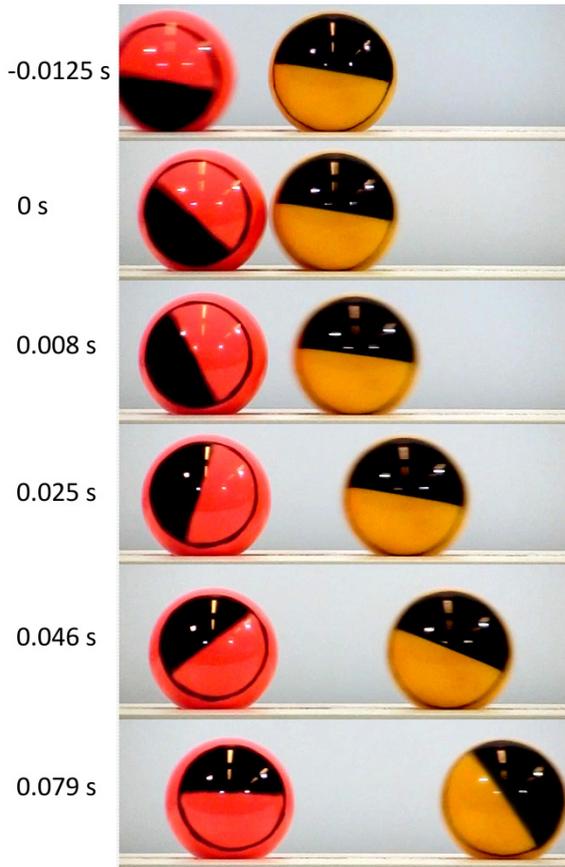
**Abb. 4:** Relativer Energieverlust der beiden Kugeln während der Beschleunigungsphase, dargestellt als Funktion des normierten Rollradius. Die vertikale Linie zeigt den experimentellen Fall an.

### 3.8. Epilog: Rotationsmessung

*Anforderung: Entwickeln einer Idee zum direkten experimentellen Nachweis der beschleunigten Rotationsbewegung. Planung des Experiments und Entwicklung einer technischen Realisierung. Dies ist im normalen Praktikumsbetrieb experimentell kaum durchführbar, da die Winkeldetektion eine sehr gute Videoaufnahme und viel Zeit für die Justierung erfordert. Dies wäre eine mögliche Weiterführung in einem kleinen Projekt.*

Bisher haben wir den Stoßprozess eingehend analysiert, jedoch nicht direkt gezeigt, dass eine Winkelbeschleunigung auftritt. Die Ergebnisse für die Geschwindigkeitsverhältnisse sowie für die Energiebilanz deuten darauf hin, dass die Modellierung den Ablauf des Prozesses weitgehend richtig erfasst; jedoch zeigen die Geschwindigkeitsverhältnisse noch Diskrepanzen von ca. 10 % zum theoretischen Wert. Die Modellierung erfolgte unter der Annahme, dass der Impuls zwischen den Kugeln beim Stoß vollständig übertragen wird, der Drehimpuls jedoch nicht. Diese Annahme lässt sich durch eine explizite Messung der Drehwinkel während des Stoßprozesses überprüfen.

Dafür wurde ein zweites Video angefertigt, in dem die Kugeln geeignet markiert wurden, um die Drehwinkel sichtbar zu machen, siehe Abb. 5. Die Ausrichtung der horizontalen Drehachse zur Grenzfläche zwischen farbiger und schwarzer Kugelhälfte gelingt mit experimentellem Fingerspitzengefühl. Der Drehwinkel wird von der Videoanalysesoftware durch Verfolgung der Grenzlinie automatisch als Funktion der Zeit ermittelt. Abbildung 5 zeigt die Bildsequenz eines entsprechenden Videos. Es ist deutlich zu sehen, dass sich die einlaufende rote Kugel nach dem Stoß im Wesentlichen auf der Stelle dreht, während die gestoßene gelbe Kugel zunächst ohne Rotation weggleitet.

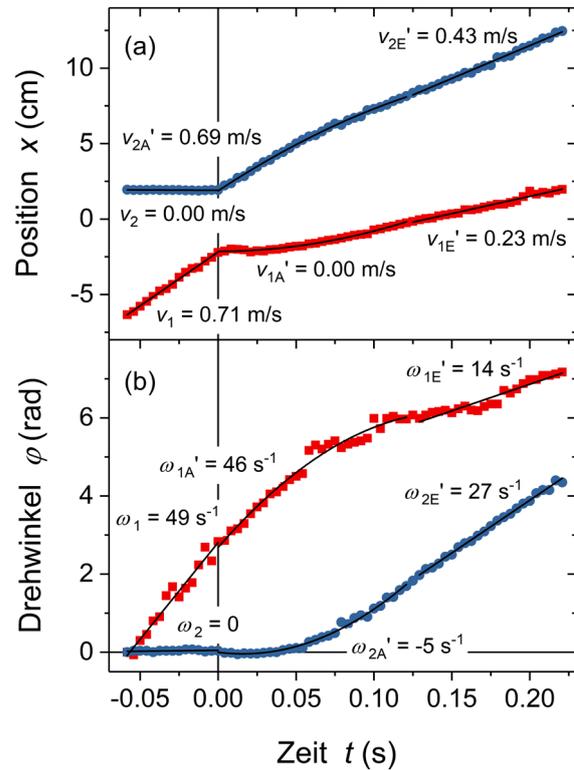


**Abb. 5:** Zur Bestimmung des Drehwinkels: Nicht zeit-äquidistante Bildsequenz in einem Zeitraum von  $-0.0125$  s vor bis  $0.079$  s nach dem Stoß. Die Kennzeichnung der Kugelhälften ermöglicht die Winkelmessung.

Die Positions- und Winkelkoordinaten einer Kollision sind in Abb. 6 dargestellt. Vor dem Stoß und nach der Beschleunigungsphase von  $\approx 0.13$  s bewegen und drehen sich die Kugeln gleichförmig. In der Beschleunigungsphase genügen die Winkelgeschwindigkeiten den Gleichungen (14) und (16). Mittels linearer bzw. quadratischer Fits an die Daten lassen sich die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, siehe Tabelle 1.

	$v$ (m/s)	$v'_A$ (m/s)	$v'_E$ (m/s)	$a'$ (m/s <sup>2</sup> )
1	$0.71 \pm 0.01$	$0.00 \pm 0.02$	$0.23 \pm 0.01$	$2.1 \pm 0.3$
2	$0.00 \pm 0.01$	$0.69 \pm 0.02$	$0.43 \pm 0.01$	$-3.1 \pm 0.3$
	$\omega$ (1/s)	$\omega'_A$ (1/s)	$\omega'_E$ (1/s)	$\alpha'$ (1/s <sup>2</sup> )
1	$49 \pm 3$	$46 \pm 3$	$14 \pm 1$	$-303 \pm 48$
2	$0.5 \pm 0.3$	$-5 \pm 1$	$27 \pm 1$	$322 \pm 16$

**Tab. 1:** Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten während des in Abb. 6 dargestellten Stoßprozesses vor dem Stoß:  $v$ ,  $\omega$ , direkt nach dem Stoß:  $v'_A$ ,  $\omega'_A$ ; Endwerte:  $v'_E$ ,  $\omega'_E$ . Beschleunigungen in der Beschleunigungsphase:  $a'$ ,  $\alpha'$ .



**Abb. 6:** (a) Positionskoordinaten und (b) Winkelkoordinaten der beiden Kugeln als Funktion der Zeit. Die schwarzen Linien sind Anpassungen an die Daten in den entsprechenden Zeitbereichen; die daraus resultierenden Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten sind angegeben.

Die bestimmten Linear- und Winkelgeschwindigkeiten genügen innerhalb der Messabweichungen der Rollbedingung. Der Vergleich der Positionsdaten in den Abbildungen 1 und 6 zeigt, dass die Bestimmungsgenauigkeit der Videoanalyse im Fall einer kombinierten Positions- und Winkelgenauigkeit abnimmt; der Erkennungsalgorithmus kann den komplexeren Formen weniger gut folgen. Diese und weitere durchgeführte Videoanalysen zeigen, dass die Annahme eines verschwindenden Drehmomentstoßes während der Kollision falsch ist. Es erfolgt vielmehr ein gewisser Drehimpulsübertrag auf die gestoßene Kugel, so dass sich diese zu Anfang ihrer

Bewegung sogar in die falsche Richtung dreht:  $\omega'_{2A}$  ist betragsmäßig klein, aber negativ. Berechnet man die Endgeschwindigkeiten  $v'_E$  der Kugeln aus den gemessenen Geschwindigkeiten  $v'_A$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\omega'_A$  mittels

$$v'_E = \frac{R^2 v'_A + cr^2 R \omega'_A}{R^2 + cr^2}, \quad \{25\}$$

erhält man  $v'_{1E} = (0.26 \pm 0.03)$  m/s und  $v'_{2E} = (0.43 \pm 0.02)$  m/s in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten in Tabelle 1. Der relative Drehimpulsverlust durch den Stoß beträgt  $(-16 \pm 13)$  %.

#### 4. Diskussion und Schlussfolgerung

In dieser Arbeit haben wir einen Videoanalyseversuch des Physikalischen Grundpraktikums, in dem die Kollision zweier Kugeln untersucht wird, vorgestellt. Obwohl es sich um ein eindimensionales Problem handelt, ist der Stoßprozess komplex. Es konnte gezeigt werden, dass in erster Näherung der Linearimpuls durch einen Kraftstoß zwischen den Kugeln ausgetauscht wird, während der Drehimpuls bei der stoßenden Kugel verbleibt. Dadurch werden die Rollbedingungen beider Kugeln verletzt und es setzt eine Nachbeschleunigung ein. Eine weitergehende Analyse zeigt, dass beim Stoßprozess auch ein gewisser Drehimpulsanteil auf die ruhende Kugel übertragen wird.

Für jeden einzelnen Durchführungsschritt haben wir versucht, die Anforderungen zu formulieren. In den Abschnitten 3.1 und 3.3 findet man lediglich Anforderungen im Wissens- und Anwendungsbereich. Diese werden von den Studierenden in der Regel gemeistert. Die in Abschnitt 3.2 zu erbringende Leistung ist vorwiegend experimenteller Art und stellt dank der intensiven Betreuung durch einen erfahrenen Praktikumsmitarbeiter auch keine zu große Hürde dar. Die in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.6 geforderte Modellbildung und Analyseleistung ist für die meisten Studierenden jedoch eine sehr große Herausforderung. Uns hat dies überrascht, weil wir in der Konzeption des Versuchs davon ausgegangen waren, dass gerade die Anwendung erlernten Wissens und erlernter Kompetenzen auf praktische Problemstellungen die Studierenden am stärksten motivieren würde. Daher wollen wir auf die Beobachtung noch etwas genauer eingehen.

Die in Abschnitt 3.4 beschriebene Anwendung der weitergehenden Modellbildung wird von den Studierenden auf sehr unterschiedlichen Niveaustufen durchgeführt. Nach den Beobachtungen der letzten Jahre lässt sich eine Klassifikation der Herangehensweise in vier Gruppen vornehmen. Es sei noch betont, dass während des Antestats das Modell und die für die Analyse benötigte Einteilung in unterschiedliche Bewegungsphasen diskutiert werden.

Die vier Analysestrategien können wie folgt umrissen werden:

1. Um die wesentlichen Parameter aus den Daten zu bestimmen, werden diese in die Zeitbereiche (a) vor dem Stoß, (b) Beschleunigungsphase und (c) asymptotischer Auslauf unterteilt. In (b) wird ein parabolischer Fit, in (a) und (c) werden lineare Regressionen durchgeführt. Diese Analysemöglichkeit wird sehr selten genutzt.
2. Die Geschwindigkeiten werden durch numerische Differentiation aus den Ortskurven bestimmt. Auch diese Analysemöglichkeit wird sehr selten genutzt. Wird sie verwendet, so ignorieren die Studierenden oft die durch die numerische Ableitung entstandene Streuung der Messdaten und wählen einzelne Datenwerte als repräsentativ aus, anstatt in bestimmten Zeitbereichen Mittelwerte zu bilden und Messunsicherheiten abzuschätzen.
3. Häufig kommt es vor, dass die Studierenden das vorgestellte Modell völlig außer Acht lassen und in den Zeiträumen vor/nach dem Stoß eine mittlere Geschwindigkeit durch lineare Regression bestimmen. Aus diesen Werten werden die Impulse und die Geschwindigkeitsverhältnisse in den Gleichungen (19) und (20) berechnet.
4. Sehr häufig ist die ausschließliche Nutzung linearer Anpassungen im Orts-Zeit-Diagramm. Dabei werden die Bereiche (a), (b) und (c) korrekt ausgewählt und die Geschwindigkeiten durch lineare Regression ermittelt; dazu werden in (b) nur wenige Datenpunkte kurz nach der Kollision verwendet.

Im Abtestat wird die analytische Anwendung des Modells nochmals diskutiert. Befragungen der Studierenden zeigten eine deutliche Korrelation zwischen der aktiven Teilnahme an den Veranstaltungen zur Datenanalyse und der richtigen Bearbeitung der experimentellen Daten während des Versuchs. Eine genauere Analyse dieser Zusammenhänge wird zurzeit nicht angestrebt. Die geschilderten Beobachtungen sollen dem Leser nur einen Überblick über die auftretenden Schwierigkeiten geben.

Grundsätzlich fehlt eine gewisse Leichtigkeit in der Wissensübertragung sowie eine forschende Herangehensweise.

Das Experiment ließe sich erweitern. Der Stoß zwischen zwei Kugeln mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten sollte das Problem des partiellen Drehmomentstoßes eliminieren. Durch eine Variation der Bahnbreite kann man den Rollradius ändern und das System vom Bereich überwiegender kinetischer Energie für  $R > c^{1/2}r$  zum Bereich überwiegender Rotationsenergie für  $R < c^{1/2}r$  trimmen.

Wir stellen die Videoanalysesoftware gern interessierten Lesern zur Verfügung. Die Software läuft unter Windows 7-10; zum Betrieb sind die LabVIEW Run-Time-Engine (frei verfügbar) sowie

die Runtime-Lizenz für NI Vision Development Module (kostenpflichtig) erforderlich.

## 5. Literatur

- [1] R. Dengler und K. Luchner, *Eur. J. Phys.* **10**, 106 (1989).
- [2] W. M. Wehrbein, *Am. J. Phys.* **69**, 818 (2001).
- [3] R. Cross, *Am. J. Phys.* **70**, 482 (2002).
- [4] E. J. Salumbides, J. Maristela, A. Uy, und K. Karremans, *Am. J. Phys.* **70**, 868 (2002).
- [5] J. Riera, J. A. Monsoriu, M. H. Giménez, J. L. Hueso, und J. R. Torregrosa, *Am. J. Phys.* **71**, 1075 (2003).
- [6] J. D. Hey, L. Kolb, und R. Piasecki, *Eur. J. Phys.* **25**, 63 (2004).
- [7] M. E. Bacon, *Am. J. Phys.* **73**, 722 (2005).
- [8] R. A. Bach und K. W. Trantham, *Am. J. Phys.* **75**, 48 (2007).
- [9] R. Cross, *Am. J. Phys.* **77**, 36 (2009).
- [10] D. Brown und A. J. Cox, *Phys. Teach.* **47**, 145 (2009).
- [11] T. McCarthy, *Phys. Teach.* **48**, 222 (2010).
- [12] A. Bonanno, G. Bozzo, M. Camarca, und P. Sapia, *Eur. J. Phys.* **32**, 419 (2011).
- [13] G. Tarantino und C. Fazio, *Eur. J. Phys.* **32**, 1617 (2011).
- [14] F. Vera and R. Rivera, *Eur. J. Phys.* **32**, 1245 (2011).
- [15] R. Cross, *Phys. Teach.* **49**, 410 (2011).
- [16] T. Eadkhong, R. Rajsadorn, P. Jannual, und S. Danworaphong, *Eur. J. Phys.* **33**, 615 (2012).
- [17] S. L. Tomarken, D. R. Simons, R. W. Helms, W. E. Johns, K. E. Schriver, und M. S. Webster, *Am. J. Phys.* **80**, 351 (2012).
- [18] P. Klein, S. Gröber, J. Kuhn, H. Fouckhardt, G. von Freymann, E. Oesterschulze, A. Widera, A. Fleischhauer und A. Müller, *PhyDid-A* **14**, 1 (2015).
- [19] M. Ziese, M2: Videoanalyse von Bewegungsvorgängen, Versuchsanleitung, <http://home.uni-leipzig.de/prakphys> (2012).
- [20] M.-H. Ha, Y.-K. Kim, und S. B. Lee, *Am. J. Phys.* **69**, 1187 (2001).
- [21] R. E. Wallace und M. C. Schroeder, *Am. J. Phys.* **56**, 815 (1988).
- [22] A. Doméneç und M. T. Doméneç Carbó, *Rev. Mex. Fis.* **44**, 611 (1998).
- [23] S. Mathavan, M. R. Jackson und R. M. Parkin, *Am. J. Phys.* **77**, 788 (2009).
- [24] A. Doméneç und E. Casasús, *Phys. Educ.* **26**, 186 (1991).
- [25] C. Hanisch, F. Hofmann, und M. Ziese, *Eur. J. Phys.* **39**, 015003 (2018).
- [26] A. Sommerfeld, „Mechanik“, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1994, S. 74ff.