Physik und Didaktik in Schule und Hochschule
PhyDid 1/8 (2009), S. 11-14

Komplexe Zahlen in der Physik

Cornelius Marsch

Goethestraße 32, 27283 Verden
(Eingegangen: 09.10.2008; Angenommen: 24.02.2009)

Kurzfassung
Anhand der Notwendigkeit komplexer Zahlen zur Naturbeschreibung wird der Gedankengang einer komplexwertigen Wirklichkeit im Gegensatz zu reellwertigen Sinnesorganen erläutert. Somit finden die komplexen Zahlen in der Physik ihre Existenzberechtigung.

1. Einführung

Die komplexen Zahlen bleiben Schülern in der Regel ein Mysterium, eine mathematische Spielerei, da sie hierin keinen Bezug zur Realität sehen. Hier setzt die vorgestellte Gedankenkette an.

2. Zahlen

2.1. Reelle Zahlen

Eine Zahl ist zunächst ein abstrakter Begriff, der erst in Verbindung mit einer Einheit eine konkrete Bedeutung gewinnt. Unter den Aussagen "In diesem Raum befinden sich vier Personen" oder "Anne hat 2,5 Kilogramm Kartoffeln eingekauft" können wir uns etwas vorstellen. Auch eine Aussage "Anne hat $\sqrt{2}$ Kilogramm eingekauft" ist sinnvoll.

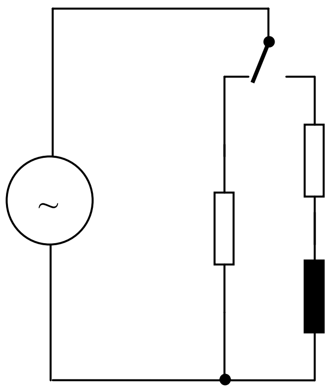

Abb.1: Wechselstromkreis

Die Sinnfälligkeit der Regel, dass das Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn die beiden Faktoren gleiches Vorzeichen besitzen, lässt sich beispielsweise mit dem Wechselstromkreis experimentell demonstrieren, s. Abb.1. Bei Verwendung eines reinen Wirkwiderstands (Schalterstellung a) schwankt der Momentanwert der Leistung zwischen null und dem Produkt aus Spannungs- und Stromamplitude, ist also ausschließlich positiv (violette Linie in Abb.2.). Ihr Mittelwert kann mit einem Wattmeter gemessen, der Verlauf von Strom und Spannung mit dem Oszilloskop dargestellt werden.

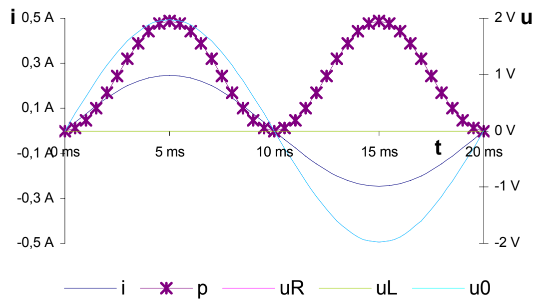

Abb.2: Wechselstromkreis mit Wirkwiderstand

Die Scheinleistung ist das Produkt aus an einer Schaltung mit Blindwiderstand angelegter Spannung und fließendem Strom. Im Fall der Abb.2 (reiner Wirkwiderstand) ist sie mit der dort dargestellten Wirkleistung identisch. Liegt hingegen eine Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Induktivität vor (Schalterstellung b in Abb.1), so ergibt sich der in Abb.3 dargestellte Verlauf von Wirkleistung (violette Linie) und Scheinleistung (braune Linie).

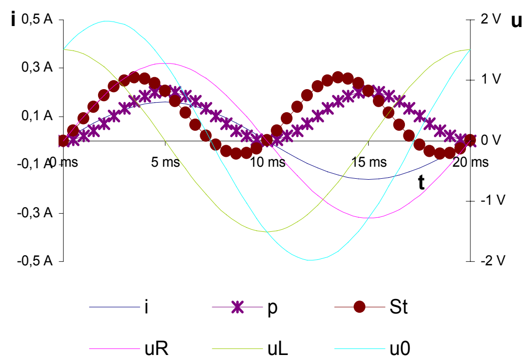

Abb.3: Wechselstromkreis mit Wirkwiderstand und Induktivität

Hier wird die Scheinleistung auch negativ. Dies ist der Fall, wenn die miteinander zu multiplizierenden Größen, die angelegte Spannung u_0 (hellblaue Linie) und der fließende Strom i (dunkelblaue Linie) unterschiedliche Vorzeichen haben: Das Produkt zweier reeller Zahlen mit unterschiedlichem

Vorzeichen ist negativ. Die Wirkleistung hingegen wird nicht negativ, da sie sich aus dem Strom i und der phasengleichen am Wirkwiderstand anliegenden Spannung u_R zusammensetzt. Ihr Mittelwert ist bei gleicher an den Wechselstromkreis angelegten Spannung kleiner als im Fall des reinen Wirkwiderstandes.

Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade vollständig. Sie sind die Vereinigungsmenge der rationalen und der irrationalen Zahlen. Hierbei sind die rationalen Zahlen (definiert als Quotient zweier ganzer Zahlen) durch die endlichen und unendlichen periodischen Dezimalbrüche gegeben, während die irrationalen Zahlen durch die unendlichen nichtperiodischen Dezimalzahlen repräsentiert sind. Auch die irrationalen Zahlen sind sinnlich erfassbar, so ist beispielsweise die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, deren Kathetenlängen 1 cm beträgt, gerade $\sqrt{2}$ cm lang.

Die irrationalen Zahlen sind nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar. Dennoch werden sie als sinnlich erfassbar eingestuft, denn die Länge der Hypotenuse des erwähnten Dreiecks ist irrational und trotzdem sichtbar. Somit sind alle reellen Zahlen den Sinnen zugänglich.

2.2. Imaginäre Zahlen

Es gibt jedoch eine Rechenoperation, die keine reelle Lösung hat: die Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl. Quadratwurzeln können im Reellen nur aus positiven Zahlen gezogen werden, da plus mal plus ebenso wie minus mal minus plus ergibt, wie in Abschn. 2.1 dargelegt.

Der Trick ist, der Quadratwurzel aus –1 einen neuen Namen zu geben: die imaginäre Einheit i. Wegen

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \{1\}$$

faktorisiert die Quadratwurzel einer negativen reellen Zahl damit zur Quadratwurzel ihres Betrages und der imaginären Einheit.

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}\ . \qquad \{2\}$$

Da die reelle Zahlengerade besetzt ist, können imaginäre Zahlen dort nicht mehr liegen. Sie bilden eine eigene Achse, die imaginäre Achse, welche mit dem Produkt aus allen reellen Zahlen mit der imaginären Einheit ebenfalls vollständig gefüllt ist. Dieser Schritt mag Schülern wie Zauberei vorkommen: Hier denken Mathematiker sich etwas aus, was es gar nicht gibt (Quadratwurzel aus einer negativen Zahl).

2.3. Komplexe Zahlen

Die imaginäre Achse wird zweckmäßigerweise senkrecht zur reellen Achse gelegt, damit ergibt sich ein kartesisches Koordinatensystem, die Gaußsche Zahlenebene, Abb.4. Hierbei ist anzumerken, dass es sich bei der Gaußschen Zahlenebene um eine Art der Darstellung komplexer Zahlen handelt – genau so wie die Zahlengerade eine Darstellungsart für die reellen Zahlen ist – und zwar um die geometrische Interpretation komplexer Zahlen [1]. Komplexe Zahlen werden wie zweidimensionale Vektoren behandelt.

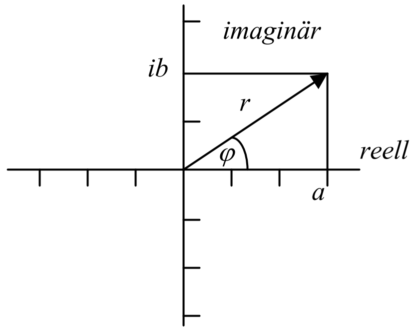

Abb.4: Gaußsche Zahlenebene

Punkte, die hier nicht auf einer der beiden Achsen liegen, heißen komplexe Zahlen z. Sie setzen sich aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b, die beide reell sind, zusammen:

$$z = a + ib\ . \qquad \{3\}$$

Da die imaginäre Achse senkrecht zur reellen Achse gewählt ist, ergibt sich für den Betrag (die Länge) von z

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \{4\}$$

sowie für den Winkel φ zur positiven reellen Achse

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \{5\}$$

(r und φ sind die Polarkoordinaten.) Aus den Polarkoordinaten ergeben sich Real- und Imaginärteil zu

$$a = r\cos\phi \qquad \{6\}$$

$$b = r\sin\phi\ , \qquad \{7\}$$

wie unmittelbar aus der Gaußschen Zahlenebene abgelesen werden kann.

Über eine Reihenentwicklung lässt sich ferner die Eulersche Formel zeigen:

$$z = re^{i\varphi}\ . \qquad \{8\}$$

Die zu z konjugiert komplexe Zahl ist:

$$z^* = re^{-i\varphi}\ . \qquad \{9\}$$

Damit folgt für den Betrag:

$$|z| = \sqrt{z^* z}\ . \qquad \{10\}$$

Wird der Winkel φ von der Zeit t abhängig gemacht, so bewegt sich der Zeiger in Abb. 4 um den Koordinatenursprung. Gilt etwa

$$\phi = \omega t\ , \qquad \{11\}$$

so rotiert der Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Dies hat zu zahlreichen technischen Anwendungen insbesondere in der Elektrotechnik geführt.

3. Komplexe Wechselstromrechnung

Es gibt zahlreiche Anwendungen komplexer Zahlen (eine Übersicht von Anwendungen in Mathematik und Physik findet sich beispielsweise in [2]), von denen hier zunächst die komplexe Wechselstromrechnung erwähnt sei. Sie dient zur Vermeidung aufwändiger trigonometrischer Berechnungen, siehe z.B. [3]. Ausgehend von der Überlegung, dass die Sinusform einer Wechselspannung die Projektion einer Kreisbewegung auf eine Richtung ist, wird dem Imaginärteil einer komplexen Spannung physikalische Realität zugeschrieben. Zwei komplexe Spannungen in beliebiger Phasenlage können dann wie zweidimensionale Vektoren addiert werden. Insbesondere dient die komplexe Wechselstromrechnung zur einfachen Anwendung der Kirchhoffschen Regeln in Schaltkreisen mit Wirkwiderstand, Induktivität und Kapazität. Das physikalisch relevante Ergebnis ist dann wieder der Imaginärteil der sich ergebenden komplexen Spannung.

Ganz so einfach darf man es sich allerdings nicht machen, wenn zwei komplexe Werte wie Spannung und Strom zur Leistungsberechnung miteinander multipliziert werden sollen. Wegen

$$i^2 = -1 \qquad \{12\}$$

trägt bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen das Produkt der Imaginärteile zum Realteil bei. Wird hier allerdings anstelle der einfachen Interpretation "nur der Imaginärteil hat physikalische Relevanz" mathematisch korrekt über die Eulersche Formel in Gestalt von

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \qquad \{13\}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right) \qquad \{14\}$$

gegangen, so ergibt sich auch hier das richtige Ergebnis.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die komplexe Wechselstromrechnung eine Vereinfachung elektrotechnischer Rechnungen darstellt. Es gibt allerdings keinen physikalisch zwingenden Grund, in die elektrotechnischen Rechnungen komplexe Zahlen einzuführen.

4. Notwendigkeit komplexer Zahlen

4.1. Curricula zur Quantenphysik

Zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts wurde die Quantenphysik entdeckt. 1926 entwickelte Erwin Schrödinger die nach ihm benannte komplexwertige Gleichung für Materiewellen. Max Born lieferte 1927 die nach ihm benannte Wahrscheinlichkeitsinterpretation: Das Betragsquadrat der Wellenamplitude liefert die Lokalisationswahrscheinlichkeit eines Quants im Experiment.

In den letzten zwanzig Jahren sind mehrere Curricula zur Quantenphysik entwickelt worden. Das Berliner Konzept [4] vermeidet konsequent mechanische Analogien wie insbesondere das Bohrsche Atommodell. Das Münchner Konzept [5] stellt klare Begriffe auf. Besonders hervorzuheben ist hier die Präparation sowie der Messprozess. Es verwendet die Ensemble-Interpretation und erläutert mit dessen Hilfe auch die Unbestimmtheitsrelation. Ferner liefert es eine anschauliche Erklärung für den Operator für die kinetische und die Gesamtenergie.

Das Karlsruher Konzept [6] liefert ein anschauliches Bild vom Atom. Die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms wird mit dem Computer analytisch berechnet und grafisch sowohl zwei als auch dreidimensional dargestellt. Ferner wird der Begriff *Elektronium* eingeführt. Es befindet sich in der Atomhülle und enthält sowohl die gesamte Ladung als auch die gesamte Masse aller Elektronen. Wird das Elektron im Wasserstoffatom lokalisiert (Messprozess), so zieht es sich auf einen Punkt zusammen, wir erhalten ein Elektron. Der große Vorteil der Verwendung von Elektronium statt Elektronen liegt darin, dass die Vorstellung Bohrscher Bahnen gar nicht erst aufkommt.

Das Bremer Konzept [7] liefert mit Hilfe des Computers unter Verwendung des Begriffs *Elektronium* ebenfalls ein anschauliches Bild des Atoms, allerdings erfolgt die Berechnung der Wellenfunktion hier numerisch. Damit sind auch andere Atome als Wasserstoff (bis hin zu einem einfachen Festkörpermodell) berechenbar.

Das Lichtwegcurriculum [8] geht einen anderen Weg. Ausgehend von der Interpretation der Quantenelektrodynamik von Feynman wird ein Zeigerformalismus entwickelt – entsprechend der Drehung einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene. Ferner wird das Elektronium mit dem Elektron als Quant eingeführt.

4.2. Das Wasserstoffatom

Die für das einfachste Atom, das Wasserstoffatom, im stationären Zustand geltende stationäre Schrödingergleichung kann eindimensional zwar noch aus der Bedingung stehender Wellen auf Bohrschen Bahnen "hergeleitet" werden (siehe z.B. [7]), ihre Erweiterung auf drei Dimensionen und insbesondere die vollständige analytische Lösung in Kugelkoordinaten (siehe z.B. [9]) geht sicher über den Leistungsumfang einer gymnasialen Oberstufe hinaus. An dieser Stelle mag es genügen, die drei sich ergebenden Gleichungen zu erwähnen.

a) Radialgleichung:
   beschreibt die Abhängigkeit der Lokalisationswahrscheinlichkeit vom Abstand vom Atomkern
b) Polargleichung:
   beschreibt die Abhängigkeit der Lokalisationswahrscheinlichkeit vom Winkel zu einer ausgezeichneten Achse
c) Azimutalgleichung:
   beschreibt die Abhängigkeit der Lokalisationswahrscheinlichkeit vom Winkel in einer Ebene, die senkrecht auf der ausgezeichneten Ebene steht.

Die Azimutalgleichung ist nun die hier interessierende Gleichung, ihre Lösungen nach [9] ,

$$\phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \qquad \{15\}$$

sind komplexe Zahlen in Reinstkultur! Sie gehen in die Lösung für die Lokalisationswahrscheinlichkeit des Elektrons im Wasserstoffatom als Faktor ein. Damit ist aber klar: Ohne komplexe Zahlen gäbe es kein Modell zur Beschreibung stabilen Wasserstoffs, geschweige denn anderer Atome.

Nach der Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation ergibt sich die Lokalisationswahrscheinlichkeitsdichte für das Elektron aus dem Betragsquadrat der Wellenfunktion. Der komplexwertige Anteil der Wellenfunktion ist durch die Lösung der Azimutalgleichung gegeben, bei der Bildung des Betragsquadrates hebt er sich heraus:

$$\phi_m^* \phi_m = \frac{1}{2\pi} . \qquad \{16\}$$

Mit anderen Worten: Die Lokalisationswahrscheinlichkeit – dass, was der Experimentator tatsächlich beobachtet – ist reellwertig.

4.3. Abschließende Betrachtungen

Die Aussage "Anne hat 5 Kilogramm Kartoffeln eingekauft" ist sinnvoll, die Aussage "Anne hat (3+4*i*) Kilogramm Kartoffeln eingekauft" dagegen nicht. Offensichtlich gibt es keine Begriffe in unseren Denkstrukturen, um mit komplexen Zahlen umzugehen.

Die Notwendigkeit der Einführung komplexer Zahlen in die Physik ergab sich im Zuge der Entwicklung der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik. Werner Heisenberg entdeckte 1927 die nach ihm benannte Unbestimmtheitsrelation: Es ist unmöglich, gleichzeitig Ort und Impuls eines Elektrons genau zu bestimmen. Das hat nichts mit messtechnischen Unzulänglichkeiten zu tun, vielmehr ergibt sich diese Folgerung aus der bis dahin entwickelten Quantenphysik.

Das war neu. Bis Ende des neunzehnten Jahrhunderts ging man davon aus, dass Teilchen und Welle zwei vollkommen verschiedene Entitäten sind. Während das Teilchen auf einen Ort begrenzt war, war die ideale Sinuswelle unendlich ausgedehnt. Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation ist im mathematischen Formalismus der Quantenmechanik in Form eines Kommutators, der die imaginäre Einheit enthält, erfasst. Die komplexwertigen Lösungen der Azimutalgleichung sind eine Folge dieser Unbestimmtheitsrelation.

Ein ganz wesentlicher Unterschied zwischen Mensch und Tier ist die Sprache zum Zwecke des Informationsaustauschs. Die menschliche Sprache sowie das Denken hat sich im Laufe der Evolution entwickelt. Es wurden über Jahrtausende Begriffe geschaffen – und zwar letztendlich aufgrund der Sinneseindrücke. Sinnlich konnte man Größenordnungen von etwa 100 Kilometern (beim Blick von einem hohen Berg) bis hinunter zu Bruchteilen von Millimetern erfassen. Das ist eine Spanne von etwa zehn Größenordnungen. Für diesen Bereich haben die Menschen Begriffe entwickelt, es wäre Zufall, wenn diese Begriffe auch für alle anderen Bereiche anwendbar wären – und ganz offensichtlich sind sie das nicht. In den zehn für unmittelbare menschliche Sinnesempfindungen zugänglichen Größenordnungen haben sich die während der Evolution gebildeten Begriffe und somit auch die reellen Zahlen bestens bewährt.

Hier wird nicht der platonistische Standpunkt vertreten, dass die Mathematik schon immer da gewesen sei [10], sondern sie ist die eindeutige Sprache menschlicher Logik – im Gegensatz zu gesprochenen Sprachen wie Deutsch oder Englisch. Sie beruht auf menschlichem Denken, auf den entwickelten Begriffen, führt jedoch auf den ersten Blick zu unsinnigen Konstruktionen wie Quadratwurzeln aus negativen Zahlen.

Die Unzulänglichkeit der Sprache und damit der menschlichen Begriffe hat schon Werner Heisenberg erkannt [11]. Bohrs Begriff der Komplementarität zielt in die gleiche Richtung.

Zusammengefasst lautet die für die Schule vorgeschlagene Begründung für komplexe Zahlen: Die Wirklichkeit (oder das, was wir dafür halten) ist zumindest komplexwertig, unsere Sinnesorgane und damit unsere Begriffe, unser Denken aber reellwertig. Die Evolution hat den Menschen lediglich mit reellwertigen Sinnesorganen ausgestattet.

5. Literatur

[1] T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie, Oldenbourg 2001

[2] J. Pade, L. Polley, K. Reiss, G. Schmieder: Komplexe Zahlen – ein Thema für die Schule, GDCP 2001

[3] H. Fricke, H. Frohne, P. Vaske: Grundlagen der Elektrotechnik, Reihe Möller Leitfaden der Elektrotechnik, Teubner 1976

[4] M. Lichtfeldt, H. Fischler: Teilchen in der Sekundarstufe II, Unterricht Physik 8 (1997) Nr. 41

[5] R. Müller: Quantenphysik in der Schule, Logos 2003

[6] P. Bronner, H, Hauptmann, F. Herrmann: Wie sieht ein Atom aus? PdN-PhiS 2/55, 2006, 18-21

[7] H. Niedderer, J. Petri: Mit der Schrödingergleichung vom H-Atom zum Festkörper, Institut für Didaktik der Physik, Universität Bremen 2000

[8] J. Werner: Vom Licht zum Atom, Logos 2000

[9] T. Mayer-Kuckuk: Atomphysik, Teubner 1980

[10] E. Behrends: Ist Mathematik die Sprache der Natur?, Spektrum der Wissenschaft Spezial 2/08

[11] W. Heisenberg: Physik und Philosophie, Ullstein 1965