

ZUR BEUGUNG

Von einfachen Freihandversuchen über die LAUE-Kegel zum reziproken Gitter und zur EWALD-Kugel

Wilfried Sommer¹, Johannes Grebe-Ellis², Jürgen Vogt³

¹Pädagogische Forschungsstelle Kassel, Brabanter Str.45, 34131 Kassel, dwsommer@aol.com;

²Institut für Physik, FB Didaktik, Humboldt-Universität zu Berlin, Newtonstr.15, 12489 Berlin,

johannes.grebe@physik.hu-berlin.de;

³Juergen_Vogt@gmx.de.

(Eingegangen: 15.12.2003; Angenommen: 02.12.2004)

Kurzfassung

Der Versuch, die Beugung in der Schule konsequent phänomenologisch zu behandeln, beginnt in dem hier vorgestellten Ansatz mit einer systematischen Erarbeitung von Erscheinungsreihen. Der Zusammenhang zwischen den jeweils wirksamen räumlichen Bedingungen und den auftretenden Erscheinungen wird durch geometrische Ordnungselemente beschrieben. Dadurch kann auf ein anschauliches Lichtmodell verzichtet werden. Zugleich sind Begriffe der Festkörperphysik aus einfachen Versuchen abzuleiten.

Teil I: Von einfachen Freihandversuchen zu den LAUE-Kegeln

1. Einleitung

Die Beugung stellt ein beliebtes Thema im Oberstufenunterricht dar. Für ihre Behandlung als Einstieg und Übergang in Probleme der Atom- und Quantenphysik sind in den letzten Jahren verschiedene Konzepte entwickelt worden. Erwähnt seien in diesem Zusammenhang der auf FEYNMAN zurückgehende *Zeigerformalismus* [1, 2, 3, 4] und das von SCHÖN und ERB entwickelte *Lichtwegkonzept* [5, 6], welches auf dem FERMAT-Prinzip aufbaut. Gemeinsam ist diesen Ansätzen das Bestreben, die einseitige Festlegung der Erklärung optischer Phänomene auf das Wellenmodell des Lichtes zu vermeiden und an die Stelle hypothetischer Größen operationale Begriffe (Zeiger, Lichtweg) zu setzen. Die Vorzüge solcher Begriffe werden zum einen darin gesehen, dass sie ein stärker phänomenorientiertes Vorgehen gestatten. Zum anderen können sie „mitwachsen“ und verlieren gerade am Übergang von klassischer Physik zu Atom- und Quantenphysik nicht ihre Gültigkeit. Insbesondere wird darauf im Interesse eines vertikal vernetzten Unterrichtes immer stärker geachtet [7].

Im Kontext dieser Ansätze wird hier eine Unterrichtsreihe vorgestellt, die aus dem Versuch entstanden ist, die Beugung in den Zusammenhang einer streng phänomenologischen Optik zu stellen. Anknüpfend an Arbeiten von MAIER [8, 9, 10], MACKENSEN [11] und SEIPP [12] wird dabei das methodische Anliegen verfolgt, die Eigenschaften der Beugungserscheinungen nicht aus denen eines

Lichtmodells abzuleiten, sondern in den räumlichen Bedingungen aufzusuchen, welche in dem Zustandekommen der Erscheinungen jeweils wirksam sind. Aus der systematischen Variation solcher Bedingungen entstehen Versuchsreihen, in deren Verlauf sich die Erscheinungen charakteristisch abwandeln. Aus dem Überblick über solche geordneten Mannigfaltigkeiten wird im einzelnen Beugungsbild die Lösung eines geometrischen Problems anschaulich, das in der Überlagerung mehrerer räumlicher Bedingungen besteht. Die Beschreibung dieses Problems wird analytisch gegeben; gelöst ist es bereits in der Erscheinung. Die Geometrie schafft einen *Zusammenhang* innerhalb der Erscheinungsreihen. Sie wird aber nicht als *Ursache* für die Erscheinungen eingeführt. Sie dient vielmehr dazu, Erscheinungen zu ordnen und die jeweils in Frage kommenden räumlichen Aspekte zusammen zu fassen. Die LAUE-Kegel sind in diesem Sinne Ordnungsstrukturen, welche den Erscheinungsbedingungen der Beugungsbilder immanent sind.

Von den möglichen Variationen der räumlichen Bedingungen, unter denen Beugung auftritt, sind die *Rotationen* eines durchleuchteten Gitters um drei zueinander senkrechte Achsen besonders aufschlussreich. Dabei steht eine Rotationsachse senkrecht zum Gitter, die beiden anderen Achsen liegen in der Gitterebene und stehen ebenfalls senkrecht zueinander. Führt man die genannten Rotationen aus, so zeigen sich charakteristische Änderungen

der Beugungsbilder. Insbesondere für Rotationen um die Achse senkrecht zur Blickrichtung und zur Richtung der Gitterspalte ergibt sich das Beugungsbild in Form eines Kegelschnittes – was die überraschende Folgerung gestattet, dass im gewöhnlichen Versuchsaufbau streng genommen immer nur ein Teil des ganzen Beugungsbildes, nämlich genau die Hälfte, beobachtet wird. –

Die experimentelle Untersuchung und geometrische Beschreibung dieser Zusammenhänge wird in zwei Teilen dargestellt. Im ersten Teil wird untersucht, durch welche geometrischen Forderungen sich für ein Gitter sämtliche unter Rotationen auftretende Formen des Beugungsbildes einschließlich des Kegelschnittes ergeben.

Der zweite Teil ist vor allem der geometrischen Analyse gewidmet: Die Richtungen, unter denen die verschiedenen Ordnungen eines Beugungsbildes erscheinen, können aus den Schnitten einer Kugel mit einem Gitter aus äquidistanten Geraden, die senkrecht auf dem im Versuch verwendeten Gitter stehen, hergeleitet werden. Wie hängen dieses Gitter aus äquidistanten Geraden und die Kugel mit dem reziproken Gitter und der EWALD-Kugel zusammen, die wir aus der Festkörperphysik kennen? Es zeigt sich, dass diese Mittel zu einer einfachen Vorschrift reduziert werden können, welche die zeichnerisch-geometrische und analytische Beschreibung einer gegebenen Beugungsanordnung auf elegante Weise gestattet.

Zugleich ist damit ein Ausblick auf moderne Arbeitsweisen in der Physik gegeben, wie sie z.B. in der Röntgenstrukturanalyse bzw. Festkörperphysik üblich sind.

2. Einfache Freihandversuche als Einstieg

Die Beugung ordnet sich in den Kontext vielfältigster Erscheinungsreihen ein; einige stellen wir in Form von Freihandversuchen an den Beginn der Unterrichtsreihe.

Blickt man nachts in eine entfernte Lampe, die sich hell blendend gegen ihr dunkle Umgebung abhebt, so erscheint sie umgeben von einem Strahlenkranz. Ist es außerdem neblig, so tritt um die Lampe herum ein Hof auf. Dieser Hof zeigt sich auch und noch deutlicher, wenn man durch eine trübe Folie mit körniger Struktur blickt. Verwendet man als „körnige Struktur“ das regelmäßige Gewebe eines fein gewebten Gardinestoffes oder etwa einer Regenschirmbespannung, so erblickt man nicht mehr Strahlenkränze oder Höfe, vielmehr sieht man ein Muster regelmäßig angeordneter heller Flecken. Achtet man auf die Form dieser Flecken, indem man vielleicht verschiedene Lampen fixiert, so lassen sie sich als vervielfältigte Bilder der jeweiligen Lampe identifizieren. Diese Lampenbilder bilden ein Muster, welches sich senkrecht zu den Fäden des Gardinestoffes erstreckt. Wird demnach der durchblickte Zwischenraum zwischen Auge und Lampe durch granulare oder regelmäßig geordnete

feine Strukturen verändert, treten Höfe oder eben: Beugungsbilder auf.

Beugungsbilder gehen also aus Strahlenkränzen und Höfen hervor: Im einen Fall ist die durchblickte Struktur fein und regelmäßig geordnet; im anderen erstreckt sie sich in unregelmäßiger Körnigkeit [13]. Dabei liegt bei Strahlenkränzen die entsprechende Körnigkeit bzw. Granulation im Auge selbst. Genaue Versuchsbeschreibungen finden sich in der angegebenen Literatur [8, 14, 15].

Mit dieser Erscheinungsreihe lernen die Schüler die Beugung in *Bildern kennen, die sich beim Anblick scharfer Kontraste durch einen fein strukturierten Zwischenraum ergeben.*

In einer zweiten Erscheinungsreihe wird untersucht, wie sich die Erscheinungen abwandeln, wenn die durchblickte Struktur zunehmend feiner wird. In horizontaler Richtung schränken die Schüler ihre Pupillenöffnung mit einem senkrechten Spalt künstlich ein, indem sie diesen direkt vor ein Auge halten und mit dem entsprechenden Auge durch den Spalt hindurch auf eine Lampe oder einen Gegenstand in der Ferne blicken. Die Spaltbreite variieren sie in einem Bereich von ca. 0,5 - 3 mm. (Solche Spalte sind einfach mit schwarzer Pappe und glaslosen Diarahmen herzustellen. Dabei ist es wichtig, dass man mit einer Schneidemaschine für ausreichend scharfe Kanten der Pappe sorgt).

Zunächst blicken die Schüler damit auf ein vielleicht 20 m entferntes Gelände, dessen senkrechte Streben durch einen waagrechten Handlauf nach oben abgeschlossen und gehalten werden. Dabei wählen sie als Spaltbreite einige Stationen aus dem oben genannten Variationsbereich. Die so gesammelten Beobachtungen vergleichen sie mit denen, welche sich bei entsprechenden Blicken durch den Spalt auf eine einige Meter entfernt stehende Halogenlampe mit kleiner Glühwendel ergeben (Abb. 1): Beim Blick auf das Gelände erscheinen die senkrechten Stäbe unscharf, der Umriss des waagrechten Handlaufs hingegen bleibt deutlich zu sehen. Die Geländerstäbe sind umso verschwommener, je kleiner die Spaltbreite ist. Beim Blick auf die Halogenlampe hingegen werden auf einer Horizontalen durch die Lampe viele helle Flecken – Bilder der Lampe – in regelmäßigem Abstand gesehen. Je kleiner die Spaltbreite wird, umso weiter liegen die Lampenbilder auseinander. An den Rändern der hellen Flecken zeigen sich nach außen hin (von der Lampe weg) zunächst rot-gelbe Ränder, nach innen hin entsprechend blau- violette. Je weiter die Flecken von der Lampe weg liegen, umso mehr erscheint der Übergang von rot und gelb über grün zu blau und violett. Schließlich verliert sich die ganze Erscheinung als schnell dunkel werdender, polychromer Streifen.

Die Einengung des Sichtfeldes durch den engen Spalt, der so durchblickt wird, hat enorme Konsequenzen. Die kontrastreiche Lampenansicht er-

scheint in regelmäßiger Vervielfachung senkrecht zur Spaltöffnung mit farbigen Säumen. Damit verstehen die Schüler auch, warum die senkrechten Gitterstäbe des Geländers (bzw. senkrechte Kanten) unscharf werden. Jeder einzelne Stab wird vervielfacht gesehen in Richtung einer horizontalen Achse. Viele vervielfachte Stabansichten ergeben zusammen die unscharfe, fast strukturlose Gitteransicht. - Die gewohnte Ansicht der Welt verdankt man der Tatsache, dass die Pupille die Öffnung vor der Augenlinse nicht zu klein werden lässt.

Im Fortgang der Versuchsreihe werden weitere Strukturen mit kleinen Öffnungen durchblickt, beispielsweise ein fein gewebter Stoff oder ein Strichgitter. Letztere sind als Klassensatz sehr preisgünstig zu erwerben, wenn man bestimmte Transmissionsgitter verwendet, wie sie in [16] vorgestellt wurden und heute als Geschenkartikel angeboten werden. (Brillen für 3D-Effekte auf Grundlage der chromatischen Aberration). Als Lampen verwendet man neben der Halogenlampe

auch Gasentladungslampen, deren Öffnungen als Spalte gefasst sind. Im Falle einer Na-Dampflampe kann man so die Versuche durch die Einfarbigkeit der Lampe zusätzlich vereinfachen. Prinzipiell bietet es sich auch bei einer Halogenlampe an, verschieden farbige Folien vor der Lampe zu verwenden.

Da die entsprechenden Versuchsreihen an anderer Stelle ausführlich beschrieben wurden [10, 17] sollen hier nur die wichtigsten Punkte zusammengefasst werden:

- Scharfer Kontrast, wie beispielsweise der einer kleinen, hellen Halogenlampe vor abgedunkeltem Hintergrund, transformiert sich beim Durchblick durch einen engen Spalt in ein regelmäßiges Muster heller Flecken, das sich als Band senkrecht zum Spaltverlauf entfaltet. Dabei treten an den Rändern der Flecken farbige Säume auf.
- Durch Veränderung der Lampengeometrie bemerkt man, dass die regelmäßig angeordnete-

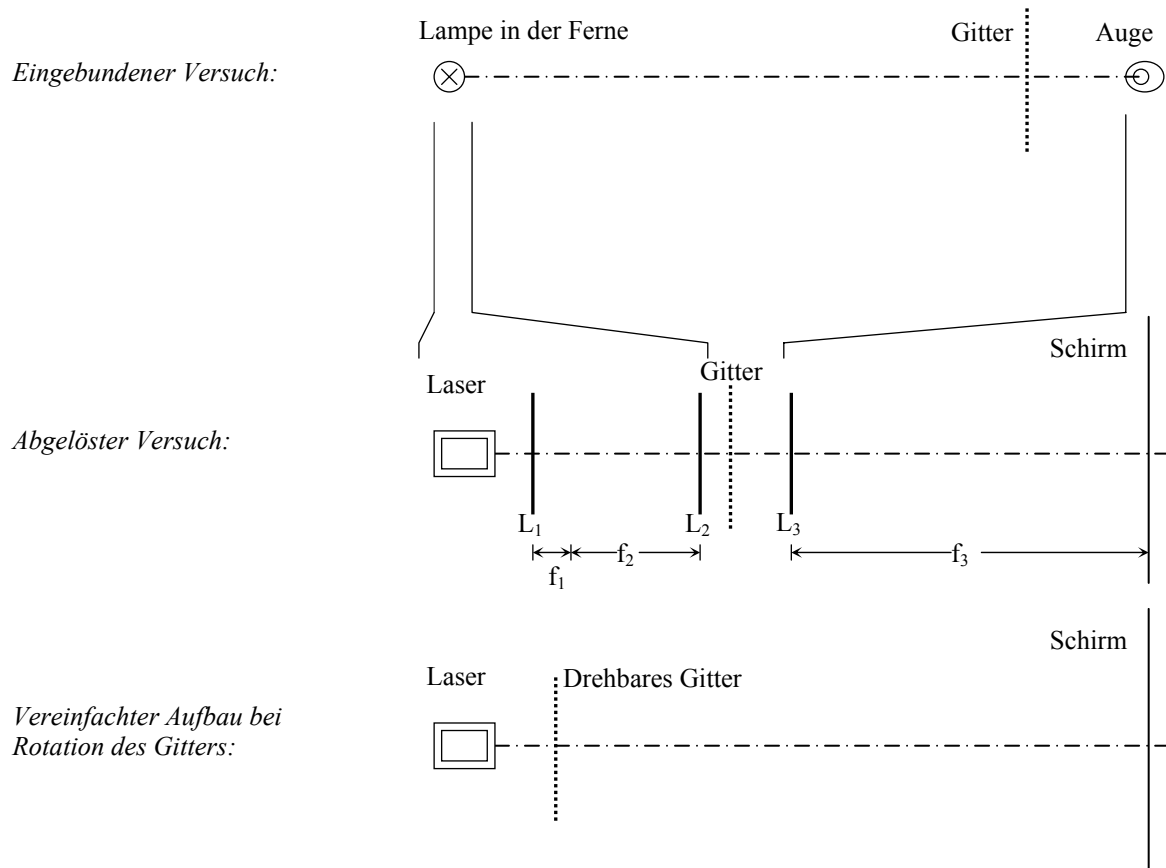


Abbildung 1:

Dem eingebundenen Versuch, bei dem ein Gitter durchblickt wird, während der Betrachter auf die Lampe in der Ferne akkommodiert, entspricht als abgelöster Versuch der angegebene Aufbau. Mittels der Linsen L_1 und L_2 wird der Laserstrahl aufgeweitet, L_3 und der Schirm in der Brennebene von L_3 stehen an Stelle des Auges. Bei Rotationen des Gitters wird ein vereinfachter Aufbau gewählt, um Begrenzungen durch die Linsenfassung von L_3 zu vermeiden. Entsprechend größer sind die hellen Flecken des Lasers auf dem Schirm. Bewährt haben sich folgende Brennweiten: $f_1 = 5\text{mm}$, $f_2 = 50\text{cm}$ und $f_3 = 50\text{cm}$. Der Durchmesser der Linse L_3 sollte im Bereich von 15cm liegen.

ten hellen Flecken vervielfachte Lampenbilder sind, die sich hier zu einem *Beugungsbild* anordnen. Dieser Punkt wird leicht übersehen, wenn man sich auf eine Halogenlampe kleiner Glühwendel beschränkt, meint man dann doch, die einzelnen Ordnungen des Beugungsbildes bestünden grundsätzlich aus hellen Flecken, wenn nicht sogar „Punkten“.

- Mit der Farbigkeit der Beleuchtung ändert sich der Abstand zwischen den vervielfältigten Lampenansichten.
- Je mehr man die durchblickte Struktur verkleinert, umso größer wird der Abstand zwischen den Lampenbildern.
- Je mehr Stege und Spalte ein periodisches Strichgitter hat, umso deutlicher treten die einzelnen vervielfältigten Lampenbilder auf. - Will man also messend an diesen Versuch herantreten, bieten sich die genannten Gitter bei einer einfarbigen Beleuchtung an.
- Verwendet man ein Strichgitter, so bleiben Translationen des Gitters in alle drei Raumrichtungen auf das Beugungsbild ohne Einfluss, solange man noch durch das Gitter blickt.

Werden in einer weiteren Erscheinungsreihe die eben genannten Translationen durch Rotationen des Gitters oder des Spalts ergänzt, kann es den Schülern - und dem Lehrer - fast die Sprache verschlagen. Wenn z. B. das oben bereits angeführte Strichgitter ($g \approx 32 \mu\text{m}$) so vor ein Auge gehalten wird, dass die Gitterstäbe zunächst senkrecht stehen und man dann das Gitter um eine horizontale Achse in der Gitterebene kippt (die untere, waagrechte Kante des Gitters kippt also zu dem Beobachter hin, die obere von ihm weg), sieht man das Band der vervielfältigten Lampenbilder nicht mehr auf einer horizontalen Geraden liegen. Es verbiegt sich vielmehr zu einer beidseitig nach oben geschwungenen Linie, deren Scheitel in der Blickrichtung nach der Lampe liegt und deren Form an eine Parabel oder einen Hyperbelast erinnert. Je weiter man das Gitter dreht, umso enger wird die Öffnung dieser Linie. Ändert man die Rotationsrichtung des Gitters, so wird in der senkrechten Gitterstellung wieder ein horizontales Beugungsbild durchlaufen, das sich bei weiterer Drehung des Gitters zu einer nach unten geschwungenen Linie abwandelt.

Demgegenüber bleiben Drehungen um andere Achsen wenig sensationell. Dreht man das Gitter um eine senkrecht zur Gitterebene stehende Achse, dreht sich das gewohnte Beugungsbild so mit, dass es stets senkrecht zu den Gitterstäben steht. Schwenkt man um eine zu den Gitterstäben parallele Achse, zeigt sich, was bereits von der Verjüngung des einzelnen Spaltes bekannt ist: das Beugungsbild weitet sich nach beiden Seiten auf.

Neben der Transformation des scharfen Kontrastes einer Lampe zu regelmäßig vervielfachten Lampenbildern treten also vor allem beim Kippen Er-

scheinungen auf, die das Interesse fesseln: Sind es wirklich Kegelschnitte, auf denen die vervielfältigten Lampenbilder im Beugungsbild liegen, wenn das Gitter rotiert? Und: Auf welcher Ortskurve wandern dabei die einzelnen Lampenbilder?

3. Einschub zur Versuchsmethodik: Einbinden und Ablösen des Beobachters

Die bisher geschilderten Versuche würde man – einer älteren Bezeichnungsweise folgend – als „subjektiv“ bezeichnen: der Beobachter steht im Versuchsaufbau und blickt in Richtung der optischen Achse. In den entsprechenden „objektiven“ Versuchen treten an die Stelle des Auges eine Optik und ein Schirm; der Beobachter tritt zurück und überblickt den Versuchsaufbau von der Seite, quer zur optischen Achse.

Die letztere, „objektive“ Perspektive ist die historisch etablierte: Beobachtungsergebnisse gelten im allgemeinen erst dann als gesichert bzw. eben „objektiv“, wenn sie sich ablösen lassen vom Bezug auf den Beobachter, vom Kontext im weitesten Sinne, selbst wenn dies insbesondere für die Optik zu der paradox erscheinenden Situation einer Optik ohne Auge [18] geführt hat. Gerade an Erscheinungen der Optik lässt sich überzeugend zeigen, dass die aus der so genannten subjektiven Perspektive getroffenen Aussagen – zumindest der Möglichkeit nach – nicht minder objektiv sind.[19]

Der Herabsetzung des subjektiven Standpunktes gegenüber dem objektiven soll im Zusammenhang des hier vertretenen Ansatzes aus folgendem Grund entgegengewirkt werden: In der Möglichkeit, gegenüber *einem* physikalischen Sachverhalt sowohl den einen, als auch den anderen Standpunkt einnehmen und *zwischen beiden wechseln zu können*, wird ein didaktisches Mittel gesehen, dem Bedürfnis der Schüler nach *Teilnehmen* (subjektiv) und *Betrachten* (objektiv) als zunächst gleich berechtigten, komplementären Formen des menschlichen Weltbezuges zu entsprechen.

Zu diesem Zweck liegt es nahe, die Bezeichnungen „subjektiv“ und „objektiv“ wegen ihrer historisch bedingten Konnotation zu ersetzen. Wir folgen dem Vorschlag MACKENSENS [20], an der Stelle von „subjektiven“ von *eingebundenen* und an der Stelle von „objektiven“ von *abgelösten* Versuchen zu sprechen.

Für die Versuchsreihen, wie sie hier bisher dargestellt wurden, heißt das: Die Schüler schauen nicht *von außen* auf den Versuchsaufbau und konstatieren auf einem Schirm die Änderungen der Beugungsbilder, sondern sie nehmen an der Versuchsdurchführung tätig teil. Indem sie selbst die Versuchsbedingungen variieren, also z.B. das durchblickte Gitter drehen, erleben sie unmittelbar, wie sich das Beugungsmuster zur geschwungenen Form abwandelt. Damit drängen sich aber auch Fragen nach dem Wandel der Erscheinungen um ein Vielfaches stärker auf als solche, die sich aus nur ver-

mittelter Kenntnis der genauen Versuchsbedingungen ergeben. Versuche bzw. Versuchsreihen, in die sich die Experimentatoren als unmittelbare Teilnehmer in der dargestellten Art hineinstellen, werden im Folgenden *eingebundene Versuche* genannt. Dem stehen Versuche gegenüber, bei denen in der Bildebene an die Stelle des Auges eine Linse und ein Schirm treten. Der Experimentator schaut *von außen* auf den Versuchsaufbau. Er überblickt die räumliche Anordnung der Elemente und die Abwandlung von Ansichten mit Distanz. D.h. er genießt eine Unabhängigkeit, der er für die intellektuelle Durchdringung des Versuchs auch bedarf: Ausmessen von Beugungsbildern, geometrisches Analysieren des Versuchsaufbaus – wie der Funktionszusammenhang des Ganzen quantitativ zu fassen und aus der Wirkungsweise der einzelnen optischen Komponenten zu erschließen ist, wird zur Herausforderung für seinen analytischen Blick. Solche Versuche sollen im Folgenden *abgelöste Versuche* genannt werden.

Der Wechsel vom Erleben der Versuche und der sorgfältigen Beobachtung der Erscheinungen bis hin zur gedanklichen Überschau und zum Erarbeiten einheitlicher Begriffe wird also durch den Übergang von eingebundenen zu abgelösten Versuchen vorbereitet. Deshalb greifen wir im weiteren Gang der Unterrichtsreihe einige Freihandversuche in ihrer abgelösten Form wieder auf und beziehen dort die Abmessungen des Gitters geometrisch auf die räumliche Gestalt des Beugungsbildes. – Wir wählen diesen Perspektivenwechsel für die geometrische Analyse des Versuchs mit Bedacht. Er macht den Schülern im Gang des Unterrichtes selbst deutlich, dass sie einerseits durch den wachen Gebrauch ihrer Sinne sich den Erscheinungen selbst annähern können, bis dahin, dass sich durch die gebotene Fülle weiteres Interesse entzündet, und dass sie sich andererseits durch die Führung ihrer intellektuellen Fähigkeiten wissenschaftlich tragfähige Begriffe und Zusammenhänge erobern. Dieser Wechsel erfrischt den Unterricht; es wird vermieden, die Beugung in einer emotionalen Schicht als etwas anzusehen, was außerhalb von einem nur „mit komplizierter Mathematik bzw. Geometrie“ zu durchschauen ist. Außerdem wird gezeigt, wie zur Untersuchung einer Erscheinung im Versuch zwei komplementäre Elemente gehören können: erlebnisstarke Einbettung und besonnene gedankliche Ordnung.

4. Geometrische Analyse am gängigen Schulversuch im Konzept optischer Wege

Wir gehen aus von folgendem abgelösten Versuch (Abb.1): Ein Gitter, dessen Stege senkrecht stehen, wird von einem Laser möglichst gut ausgeleuchtet. Eine Linse L_1 kurzer Brennweite und eine weitere Linse L_2 deutlich größerer Brennweite weiten den Laserstrahl auf. Der Abstand der beiden Linsen ist gleich der Summe ihrer Brennweiten f_1 und f_2 . Es

folgen ein Gitter oder ein Spalt, eine Linse L_3 großer Brennweite und ein Schirm, der in der Brennebene der letzten Linse L_3 steht. Die Abstände zwischen dem Gitter und den beiden benachbarten Linsen L_2 und L_3 können frei gewählt werden, sie beeinflussen das Beugungsbild nicht.

Will man den Bezug zwischen den Abmessungen des Spaltes oder Gitters und der Form des Beugungsbildes kennen lernen, so muss man durchsichtige Bereiche des Gitters auf die Lampenbilder bzw. Ordnungen des Beugungsbildes geometrisch beziehen. Diesen Bezug arbeiten wir im *Konzept optischer Wege* [9, 11] heraus. Wie dabei der Begriff des optischen Weges gefasst wird, soll zunächst an einem Beispiel kurz erläutert und dann in einer Definition zusammengefasst werden.

Beispiel:

Eingebundene Perspektive:

Undurchsichtige Kanten oder Peilstäbe werden vor hellem Hintergrund dann in einer Flucht gesehen, wenn sie längs einer Geraden aufgestellt sind. Werden die Peilstäbe hingegen vor einem Spiegel gesehen, so müssen sie gemäß dem Spiegelgesetz aufgestellt werden, wenn man sie in einer Flucht sehen will. Das heißt: Die Geraden der beiden Teilstrecken dieser Flucht, deren hintere Hälfte in den Spiegelraum hineinläuft, stehen zur Normalen der Spiegelebene im gleichen Winkel. Über die Geraden und deren Lage zur Spiegelnormale kann der Versuchszusammenhang geometrisch gefasst werden. Solche Geraden nennen wir *optische Wege*.

Abgelöste Perspektive:

Der Fluchtgeraden im eingebundenen Versuch entsprechen Schattengrenzen im abgelösten Versuch, die sich ergeben, wenn im Versuchsaufbau an die Stelle unseres Auges eine Lampe tritt. Vergleichbares trifft für den Spiegelversuch zu. Hier lassen sich über die gleichen Geraden, welche schon im eingebundenen Versuch den Versuchszusammenhang geometrisch bestimmten, die Erscheinungen ordnen.

Zusammenfassung:

Optische Wege sind gedankliche Ordnungselemente, mit denen wir die räumlichen Bedingungen eines optischen Versuchsaufbaus auf die sich ergebende Erscheinung geometrisch beziehen. Sie ergeben sich in eingebundenen Versuchen, wenn man die möglichen Sichtverbindungen aufsucht, in abgelösten Versuchen, wenn man die möglichen Schattengrenzen verfolgt.

So kann im Rahmen des Optikunterrichtes ohne anschauliche Lichtmodelle der Umgang mit optischen Wegen geübt werden. Der Übergang zum FERMAT-Prinzip schließt sich an. Wir beschreiben die Brechung im Konzept optischer Wege, indem wir die Wegabschnitte in den einzelnen Medien mit dem Brechungsindex n gewichten und eine minimale optische Weglänge fordern. Im Rückblick ergibt

sich eine ideal geformte Linse aus der Bedingung, dass man für die so gewichteten optischen Wege zwischen Gegenstands- und Bildpunkten einer Abbildung gleiche Länge fordert.

Indem wir das FERMAT-Prinzip in seiner räumlichen Fassung formulieren, bleiben wir näher an den Erscheinungen: Weglängen lassen sich ausmessen. Für den formal möglichen Übergang zur Vorstellung eines Lichtstroms, der die gekennzeichneten Wege in kürzester Zeit durchläuft, besteht aus dem Zusammenhang der experimentellen Gegebenheiten heraus nicht nur kein Anlass; über das, was die räumliche Analyse liefert, wäre damit auch kein zusätzlicher Erkenntnisgewinn verbunden.

Das Konzept optischer Wege greift damit das von ERB und SCHÖN entwickelte Lichtwegkonzept auf [5,6]. In ihm werden insbesondere über das FERMAT-Prinzip die Unterrichtsinhalte vertikal vernetzt und kumulative Lernprozesse gefördert [7]. Das Lichtwegkonzept ist auf die Tragfähigkeit der Inhalte hin angelegt. Wie dort beispielsweise die Brechung oder auch die Linse behandelt werden können und welche Modifikationen sich bei einer räumlichen Fassung des FERMAT-Prinzips ergeben, findet sich in der Literatur und soll hier nicht wiederholt werden [5,17].

Was ergibt nun die geometrische Analyse des abgelösten Beugungsversuchs im Konzept optischer Wege? – Im eingebunden Versuch liegt zwischen Lampe und Gitter ein großer Abstand. Diesem entspricht ein Feld annähernd paralleler optischer Wege. Eine analoges Feld annähernd paralleler optischer Wege erreicht man im abgelösten Versuch durch die Aufweitung des Laserstrahls mit den

Linse L_1 und L_2 (Mögliche Brennweiten der Linsen L_1 und L_2 : $f_1 = 5\text{mm}$, $f_2 = 50\text{cm}$). Bis zum Gitter sind die optischen Wege alle gleich lang, müssen sie doch innerhalb der Linse mit dem Brechungsindex n gewichtet werden. Vor dem Gitter liegen, entsprechend des Abstandes der Linsen L_1 und L_2 , die optischen Wege parallel zur optischen Achse. – Den Einfluss von Hornhaut und Augenlinse fasst die Linse L_3 zusammen; an die Stelle der Netzhaut tritt der Schirm. Dem Durchblick durch das Gitter bzw. der Akkommodation in die Ferne entspricht die Schirmstellung in der Brennebene der Linse L_3 (Mögliche Brennweite für die Linse L_3 : $f_3 = 50\text{cm}$). Es empfiehlt sich, eine Linse großen Durchmessers einzusetzen, beispielsweise von Leybold mit einem Durchmesser von ca. 15cm).

Um die Situation zu Beginn einfach zu gestalten, wählen wir ein Gitter mit sehr vielen senkrechten Strichen und kleiner Gitterkonstante aus. Die Gitteröffnungen sind im Vergleich zu den Gitterstegen schmal. Man sieht so im Beugungsbild kleine und sehr scharfe, auf einer Horizontalen symmetrisch angeordnete helle Flecken: die Lampenbilder 1., 2., allgemein n -ter Ordnung. Diese liegen in einem nicht zu großen Bereich um die Symmetrieachse annähernd äquidistant und treten mit großer Schärfe bzw. hohem Kontrast hervor. Hier macht sich der Einsatz des Lasers geltend.

Da der Schirm in der Brennebene der Linse L_3 steht, gehören zu jedem hellen Fleck des Beugungsbildes zwischen Gitter und Linse L_3 entsprechende, parallele optische Wege, die dann hinter der Linse zusammenlaufen. Sie sind, gemessen von einer zu ihnen senkrechten Ebene diesseits der Linse L_3 bis hin zum Schirm jenseits der Linse L_3 ,

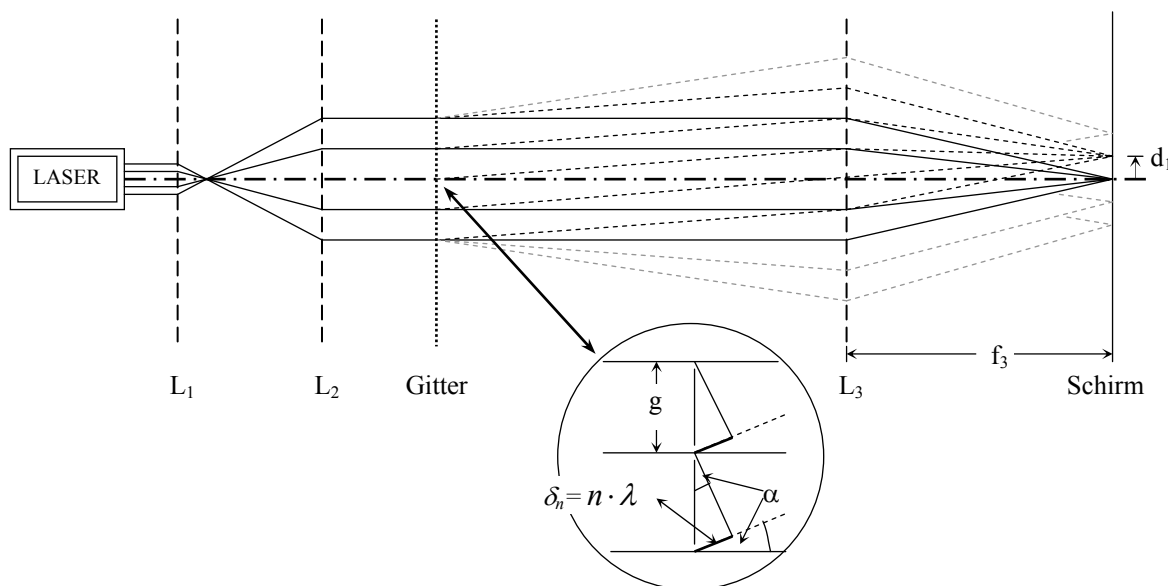


Abb. 2:

Für Lampenbilder n -ter Ordnung unterscheiden sich die optischen Wege für benachbarte Gitteröffnungen um $\delta_n = n \cdot \lambda$

gleich lang. Außerdem sind zwischen Laser und Gitter trotz der den Laser aufweitenden Linsen, wie oben erläutert, alle optischen Wege gleich lang. - Diese Ergebnisse können, wenn die Linse auf der Grundlage des FERMAT-Prinzips in seiner räumlichen Fassung mit den Schülerinnen und Schülern abgeleitet werden.

Man geht dabei vom Experiment aus und schließt auf den Verlauf der optischen Wege. Als besonders instruktiv hat sich dabei eine kleine Variation des Experiments erwiesen, bei der man einen Schirm zwischen dem Gitter und der Linse entlang schiebt: Die Schattengrenzen, welche auf die Gitterfassung zurückgehen, laufen mit zunehmendem Abstand vom Gitter auseinander, so wie es der Lage der unterschiedlichen hellen Flecken des Beugungsbildes entspricht.

Die experimentellen Gegebenheiten sind im Konzept optischer Wege also so zu formulieren, dass am Gitter die optischen Wege, mit Ausnahme der nullten Ordnung, abknicken. Gleichzeitig unterscheiden sich dort die zu benachbarten Gitteröffnungen gehörigen optischen Wege jeweils um eine bestimmtes Wegstück gleicher Länge. Diese Wegstücke kann man für alle Beugungsordnungen aus dem Experiment berechnen. Sie sind ganzzahlige Vielfache einer für die Beleuchtung charakteristischen Länge, der Basislänge λ [4, 5]. Dabei geht man von den üblichen Formeln aus (Abb. 2).

$$\sin \alpha_n = \frac{n \cdot \lambda}{g} \quad \text{und} \quad \tan \alpha_n = \frac{d_n}{f_3}$$

Das Kriterium, welchem die optischen Wege genügen, wenn die Lampenbilder im Beugungsbild auftreten, lautet damit: Für ein Lampenbild n -ter Ordnung unterscheiden sich zu benachbarten Gitteröffnungen gehörige optische Wege um die Länge $\delta_n = n \cdot \lambda$. Hingegen sind alle zu einer bestimmten, einzelnen Gitteröffnung und Beugungsordnung gehörenden optischen Wege gleich lang, wie die oben erläuterte Anwendung des FERMAT-Prinzips sofort zeigt. Das Beugungsbild hat nur in der Richtung vervielfachte Lampenansichten, in der sich zu benachbarten Gitteröffnungen gehörige optische Wege um ganzzahlige Vielfache der Basislänge unterscheiden. In der Richtung, in welcher alle optischen Wege gleich lang sind, tritt keine Beugung auf.

Die Schüler erschließen sich also aus der Erscheinung des Beugungsbildes im Experiment ein Kriterium für optische Wege. Sie erweitern den Begriff des optischen Weges, mit dem sie stets räumliche Zusammenhänge in optischen Experimenten formuliert haben, auf die Beugung. Dabei treten ganzzahlige Vielfache einer Basislänge auf, die sie mit λ bezeichnen und die je nach Farbe der Lampe unterschiedlich groß ist. Ein spontaner Schülerausruf in der entsprechenden Stunde fasste das Ergebnis so zusammen: „Die optischen Wege sind hier ja wie

die Ladung beim MILLIKAN-Versuch quantisiert“. Der Schüler hatte die Basislänge λ kennen gelernt, ohne die Modellvorstellung einer Welle zugrunde gelegt zu haben.

Wir fassen zusammen: Die hier vorgestellten Beugungserscheinungen zeigen vervielfachte Lampenbilder. Die Beschreibung dieser Erscheinungen im Konzept optischer Wege bedeutet, dass optische Wege hinter dem Gitter abknicken. Die beiden geometrischen Bedingungen, welche für die optischen Wege eines Lampenbildes n -ter Ordnung im Beugungsbild gelten, sind:

- 1. *Bedingung*: Für benachbarte Gitteröffnungen unterscheiden sich die Längen optischer Wege um $\delta_n = n \cdot \lambda$.
- 2. *Bedingung*: Die optischen Wege einer Gitteröffnung sind alle gleich lang.

5. Rotationen des Gitters

Mit den Ergebnissen unserer geometrischen Analyse greifen wir nun die drei Rotationen des Gitters auf, die wir bereits in eingebundenen Versuchen kennengelernt haben. Wir folgen dabei dem von MAIER in [10] gezeigten Vorgehen.

1. Drehen:

Die Rotationsachse steht senkrecht zur Gitterebene (Abb. 3). Das Beugungsbild folgt unmittelbar den Drehungen des Gitters. Es erstreckt sich stets senkrecht zur Richtung der Gitterstege. Die nullte Ordnung bleibt fest. Die Abstände der einzelnen Lampenbilder untereinander ändern sich nicht.

Die Bedingungen, dass sich die optischen Wege benachbarter Gitteröffnungen um $\delta_n = n \cdot \lambda$ unterscheiden, für eine bestimmte Gitteröffnung aber alle Wege gleich lang sind, legen auch hier die Lage der Lampenbilder im Beugungsbild fest.

2. Schwenken:

Die Rotationsachse liegt parallel zu den Gitterstegen bzw. Öffnungen (Abb. 3). Die einzelnen Lam-

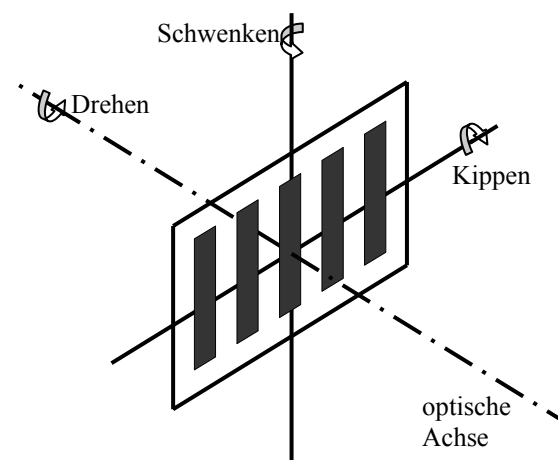


Abb. 3

Die drei Rotationen des Gitters: Drehen, Schwenken, Kippen.

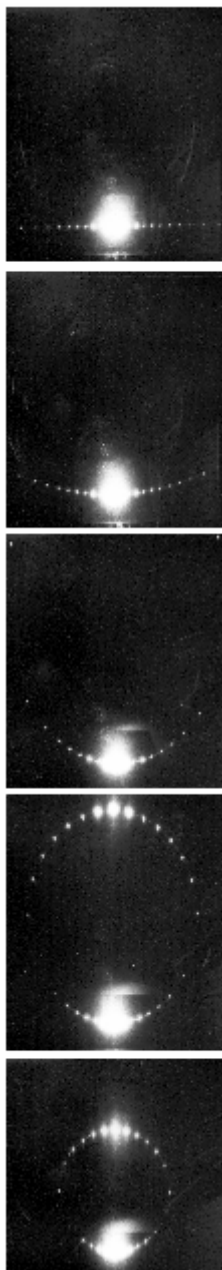


Abb. 4
Beugungsbilder für
verschiedene Kipp-
winkel des Gitters.

penbilder erstrecken sich weiterhin auf einer Geraden senkrecht zu den Gitterstegen. Die nullte Ordnung bleibt fest. Hingegen bewegen sich alle anderen Lampenbilder von der nullten Ordnung weg allerdings so, dass sie rechts und links der nullten Ordnung unterschiedlich schnell auseinander laufen. Die Linsenfassung der Linse L_3 begrenzt unter Umständen den Versuch. Wenn man sich an den etwas größeren hellen Flecken auf dem Schirm nicht stört, kann man alle Linsen einfach weglassen. Im zweiten Teil dieser Darstellung werden wir im Zusammenhang mit der EWALD-Kugel diese Rotation weiter untersuchen.

3. Kippen:

Die Rotationsachse liegt in der Gitterebene, senkrecht zu den Gitterstegen (Abb. 3). Insbesondere wenn man die Einschränkungen der Linsenfassung von L_3 vermeidet (vgl. 2. Schwenken), kann man in einem weiten Bereich verfolgen, wie die Lampenbilder auf annähernd senkrechten Linien nach oben oder unten wandern, je nach dem, in welche Richtung man kippt. Die Gesamtheit der Lampenbilder liegt auf einer geschwungenen Linie, welche an einen Hyperbelast oder eine Parabel erinnert.

Je weiter man kippt, umso stärker wird die Krümmung. Ein weiteres Beugungsbild: das der Spiegelung in den rückwärtigen Raum, tritt im Blickfeld auf. Schließlich wandern bei fortgesetzter Gitterdrehung die Lampenbilder beider Beugungsbilder, dem der direkten Beleuchtung und dem der Spiegelung, im vorderen Halbraum zusammen. Sie bilden nun eine geschlossene Linie, die an eine Ellipse erinnert. Je weiter man das Gitter dreht, umso kleiner wird der „Ellipsenumfang“ und es tragen immer weniger Lampenbilder zum Beugungsbild bei; d.h.

höhere Ordnungen gehen nach und nach verloren (Abb. 4).

Mit einigem Erstaunen realisiert man so, dass man bis jetzt vielleicht das Beugungsbild der Spiegelung entweder nie beachtet hat, oder dass man stets Versuchsbedingungen wählte, in denen es nur sehr eingeschränkt erscheinen kann [10, 14].

Die Erscheinungen im Zusammenhang mit zuletzt genannten Kippen des Gitters faszinieren unheimlich. – Mit entsprechender Heftigkeit drängt sich die Frage nach der genauen Form des Beugungsbildes und dem Zusammenhang zur geometrischen Analyse des vorangegangenen Kapitels auf. Diese Aufgabe soll nun in Angriff genommen werden. Den Ausgangspunkt dazu bilden die beiden Bedingungen, welche dort für die optischen Wege eines Beugungsbildes n -ter Ordnung herausgearbeitet wurden. Sie werden im Folgenden auf ihre Tragfähigkeit hin untersucht bzw. überprüft.

Die Mannigfaltigkeit aller optischen Wege, welche durch die 1. Bedingung festgelegt wird, ist dabei weitaus umfassender als die Gesamtheit der optischen Wege, welcher der 1. und 2. Bedingung genügen. Betrachten wir hierzu zunächst für ein bestimmtes, festes n die 1. Bedingung: Die Längen aller optischen Wege benachbarter Gitteröffnungen müssen sich um $\delta_n = n \cdot \lambda$ unterscheiden. Dafür greifen wir uns zwei optische Wege benachbarter Gitteröffnungen heraus; diese optischen Wege sollen die Gitterebene auf einer zu den Gitterstegen senkrechten Achse a schneiden. Der Bedingung $\delta_n = n \cdot \lambda$ genügen diese optischen Wege bei einem senkrecht stehenden Gitter nicht nur, wenn sie horizontal liegen, sondern auch, wenn sie um die Achse a unter Beibehaltung der Bedingung $\delta_n = n \cdot \lambda$ rotieren und dabei an den Schnittpunkten mit der Gitterebene abknicken. Diese 1. Bedingung ist für diese beiden optischen Wege also immer dann erfüllt, wenn sie die Mantellinien zweier coaxialer Kegel mit der Achse a bilden (Abb. 5). Berücksichtigte man *alle* optischen Wege längs der Achse a , ergäbe sich entsprechend der Anzahl der Gitteröffnungen eine Schar coaxialer Kegel um die Achse a . Weitere, in der Gitterebene zur Achse a parallele Achsen führten zu analogen Lösungen. Da die Gesamtheit aller optischen Wege dieser Kegelschar, die in eine bestimmte Richtung zeigen, zu einem bestimmten hellen Fleck gehören, reicht es in Zukunft aus, wenn wir uns auf *einen* Kegel mit der Achse a beschränken, dessen Öffnungswinkel durch $\cos \beta_n = \frac{n \cdot \lambda}{g}$ festgelegt ist, geht es doch dar-

um, eine geometrisch Bedingung zu finden, welche an die optischen Wege gestellt werden muss, wenn eine vervielfachte Lampenansicht im Bewegungsbild auftritt. Dieser Kegel gibt uns die Mannigfaltigkeit möglicher Richtungen für das gewählte n an, unter der man gemäß der 1. Bedingung den ent-

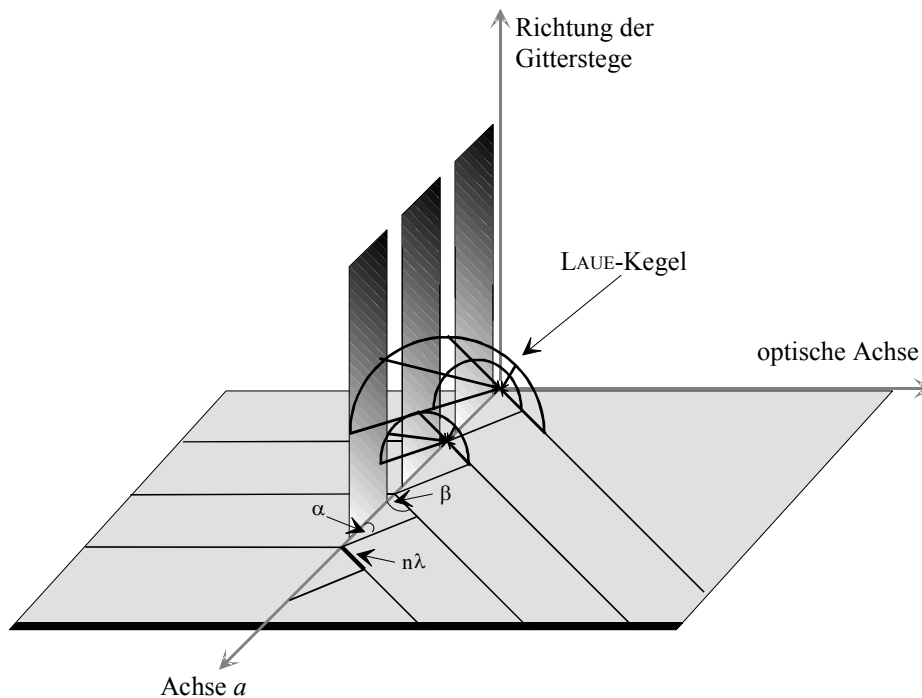


Abbildung 5:

Zu benachbarten Gitteröffnungen gehörige optische Wege unterscheiden sich in ihrer Länge um $\delta_n = n \cdot \lambda$. diese Bedingung ist auch erfüllt, wenn die optischen Wege am Gitter so abknicken, dass sie zugleich Mantellinien der LAUE-Kegel sind.

sprechenden hellen Fleck des Beugungsbildes zu erwarten hat. Dabei muss stets $\frac{n \cdot \lambda}{g} < 1$ sein. Diese

Forderung legt fest, welche Werte n annehmen darf und wieviel Kegel entsprechend auftreten.

Die 2. Bedingung – alle optischen Wege einer Gitteröffnung sind gleich lang – wählt nun aus dieser Mannigfaltigkeit bestimmte Wege aus: Bei einem senkrecht stehenden Gitter und waagrechter optischer Achse genau diejenigen, welche sich durch den Schnitt des genannten Kegels mit der Horizontalebene ergeben. Denn nur die senkrecht zu den Gitteröffnungen stehenden Wege erfüllen die Bedingung gleicher Länge entlang einer Gitteröffnung.

Die 1. Bedingung kann man durch einen Kegel darstellen, dessen Achse in der Gitterebene senkrecht auf der Richtung der Gitteröffnungen steht und dessen Spitze in einer Gitteröffnung liegt. Solche Kegel werden nach MAX VON LAUE LAUE-Kegel genannt. Die zweite Bedingung stellt man durch eine Ebene dar, welche die Kegelachse a enthält und senkrecht zum Gitter steht. Durch den Schnitt der entsprechenden LAUE-Kegel mit dieser Horizontalebene sind für ein Gitter, welches senkrecht zur optischen Achse steht, die Richtungen der vervielfältigten Lampenbilder im Beugungsbild festgelegt – und zwar beide: das Beugungsbild in *Durchsicht* durch das Gitter und in *Spiegelung*. Die geometrische Analyse lässt sich hier also auf den Schnitt der LAUE-Kegel mit einer Ebene reduzieren.

Was ergibt sich nun bei Kippung des Gitters um die Achse a (3. Rotation)?

Die 1. Bedingung können wir unverändert übernehmen, wird doch das Gitter gerade um die Achse a gedreht, die auch Achse der LAUE-Kegel ist. Deren Lage ändert sich nicht. Für die 2. Bedingung, welche alle optischen Wege einer Gitteröffnung betrifft, müssen wir nun das Zusammenspiel von Wegabschnitten vor und hinter dem Gitter betrachten. Dafür gehen wir zunächst gemäß Abbildung 6 von einer Seitenansicht auf den Versuchsaufbau aus, bei der das Gitter um φ

(Kippwinkel $\varphi = 40^\circ$) um die Achse a gedreht wurde. Durch den Punkt A läuft senkrecht zur Blattebene die Achse a .

Zunächst beschränken wir uns auf zwei optische Wege 1 und 2, welche zu einer bestimmten Gitteröffnung gehören und übereinander liegen. Der Weg 1 ist vor dem Gitter um die Strecke V_1G_1 länger als der Weg 2, welcher dafür hinter dem Gitter um die

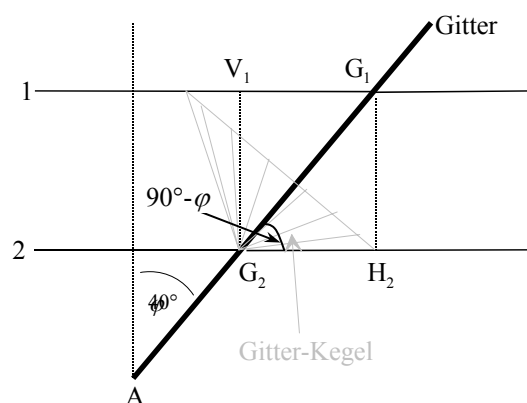


Abbildung 6:

Seitenansicht für ein Gitter, das um 40° gedreht wurde zusammen mit zwei optischen Wegen. Die optischen Wege 1 und 2 können hinter dem Gitter abknicken. Dabei müssen die Wegabschnitte V_1G_1 und G_2H_2 gleich lang bleiben und außerdem G_1H_2 stets senkrecht auf G_2H_2 stehen. Es ergibt sich der Gitterkegel.

Strecke G_2H_2 länger ist als Weg 1. Von V_1 und G_2 bis zum Laser sind die optischen Wege gleich lang, wie auch von G_1 und H_2 die optischen Wege bis zum Schirm die gleiche Länge aufweisen.

Da auf dem Schirm in der Brennebene der Linse L_3 vervielfältigte Lampenbilder zu sehen sind, müssen hinter dem Gitter die optischen Wege weiterhin parallel laufen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Strecke G_1H_2 senkrecht auf den Wegen 1 und 2 hinter dem Gitter steht. - Die Bedingung gleicher Längen für die Wege 1 und 2 ist demnach so zu fordern, dass zum einen die Strecken V_1G_1 und G_2H_2 gleich lang sind und zum anderen die Strecken G_1H_2 und V_1G_2 senkrecht zu den optischen Wegen stehen. Die eben genannten Bedingungen bleiben auch dann erfüllt, wenn das Dreieck $G_1G_2H_2$ so rotiert, dass G_1 und G_2 fest sind, H_2 aber so wandert, dass der Winkel $90^\circ - \varphi$ zwischen G_1G_2 und der Strecke G_2H_2 erhalten bleibt. Die Strecken G_2H_2 bilden dann die Mantellinien eines Kegels, dessen Achse die Richtung der Gitteröffnung ist (G_1G_2) und dessen Winkel der Ergänzungswinkel zu 90° des Kippwinkels φ ist.

Würden wir alle parallelen optischen Wege, welche zwischen den Wegen 1 und 2 bzw. darüber und darunter liegen, zulassen, so erhielten wir eine entsprechende Kegelschar. Da für Beugungsbilder die Richtungen wesentlich sind, in welchen die optischen Wege bestimmten Bedingungen genügen, können wir uns auch hier auf einen Kegel beschränken. Dieser fasst alle Richtungen zusammen, die durch die Bedingung gleich langer optischer Wege innerhalb einer Gitteröffnung festgelegt sind. Er soll als *Gitterkegel* bezeichnet werden.

Damit folgt für die 3. *Rotation* aus der Bedingung gleich langer optischer Wege innerhalb einer Gitteröffnung, dass die Richtungen *aller* Lampenbilder des Beugungsbildes auf dem Mantel eines Kegels liegen, dessen Spitze an einer beliebigen Stelle einer Gitteröffnung liegt und dessen Öffnungswinkel 90° vermindert um den Kippwinkel φ beträgt (Findet keine Kippung statt, $\varphi = 0$, so entartet der Kegel zu einer Ebene senkrecht zum Gitter; wir haben die oben beschriebene Situation erreicht). Die Richtungen einzelner Lampenbilder des Beugungsbildes müssen *zusätzlich* der Bedingung $\delta_n = n \cdot \lambda$ gehorchen. Diese Bedingung führt auf die LAUE-Kegel. Fallen nun die Spitzen der LAUE-Kegel mit der des Gitter-Kegels zusammen, *so ergeben die Schnitte dieser Kegel die Richtungen, für welche die optischen Wege beide Bedingungen zugleich erfüllen*. In Abbildung 7 sind die Schnitte der LAUE-Kegel mit dem Gitterkegel angegeben.

Die Linien, welche die LAUE-Kegel mit dem Gitterkegel gemeinsam haben, geben an, wo die vervielfältigten Lampenbilder mit Spiegelung am Gitter bzw. bei Durchleuchtung des Gitters zu erwarten sind.

An dieser Stelle versteht man, warum bei Kippung des Gitters die vervielfältigten Lampenbilder auf einer geschwungenen Linie zu sehen sind, die an einen Hyperbelast oder eine Parabel erinnert und die schließlich mit dem Beugungsbild der Spiegelung sich zu einer Kurve schließt, welche einer Ellipse gleicht: Der Schirm schneidet den Gitterkegel und je nachdem, wie seine Ebene bezüglich der Mantellinien des Gitterkegels liegt, ergibt sich entweder eine *Hyperbel*, eine *Parabel* oder eine *Ellipse*. Bei einem Drehwinkel von 45° hat der Gitterkegel eine senkrechte Mantellinie. Die senkrechte Ebene des Schirms verläuft parallel zu dieser Mantellinie des Gitterkegels; die Schnittkurve ist eine Parabel. Entsprechend wird bei Drehwinkeln kleiner 45° die Schnittkurve ein Hyperbelast, bei Drehwinkeln über 45° eine Ellipse. Sorgfältige Messungen, bei denen man auf der Tafel die Form des Beugungsbildes festhält, bestätigen dies. Bei einem gekippten Gitter findet man die vervielfältigten Lampenansichten des Beugungsbildes auf dem ebenen Schirm in Form von Kegelschnitten.

Während man das Gitter kippt, wandern die Lampenbilder einer bestimmten Ordnung auf dem senkrechten Schirm annähernd auf Geraden. Wählt man den Abstand zwischen Gitter und Tafel entsprechend, so kann man direkt verfolgen, wie die hellen Flecken die senkrechten Linien eines Tafelmusters überstreichen. Die Richtungen dieser hellen Flecken werden während der ganzen Rotation durch die Mantellinien der entsprechenden LAUE-Kegel bestimmt. Aus diesen schneidet die Schirmebene Hyperbeläste heraus. Da der Öffnungswinkel der LAUE-Kegel bei vielen Gittern recht groß ist ($n \cdot \lambda \ll g$), wird die Krümmung der entsprechenden Hyperbeläste klein, d.h. die Hyperbeläste nähern sich Geraden an.

Kippt man nun ein Gitter, beginnend bei einem Kippwinkel von $\varphi = 0^\circ$ bis annähernd 90° , so schneidet zunächst der zur Horizontalebene entartete Gitterkegel aus allen gemäß $n \cdot \lambda < g$ möglichen LAUE-Kegeln die Richtungen für die verschiedenen Lampenbilder des Beugungsbildes heraus. Je weiter man das Gitter dreht, umso enger wird der Öffnungswinkel des Gitterkegels. Entsprechend hat der Gitterkegel mit immer weniger LAUE-Kegeln gemeinsame Mantellinien, bis es bei Rotationswinkeln von annähernd 90° nur noch einige LAUE-Kegel sind, mit denen sich gemeinsame Schnittlinien ergeben (Abb 7).

Kommt man in einem Leistungskurs Physik an dieser Stelle an, so haben die Schülerinnen und Schüler - folgt man dem hier beschriebenen Curriculum - ein weiteres Mal die Tragfähigkeit einer physikalischen Begriffsbildung erlebt. Ausgehend von einfachen Beobachtungshandlungen, die den optischen Weg operational definieren, können sie dann die Beugung am gängigen Schulversuch im Konzept optischer Wege beschreiben. Ihnen begeg-

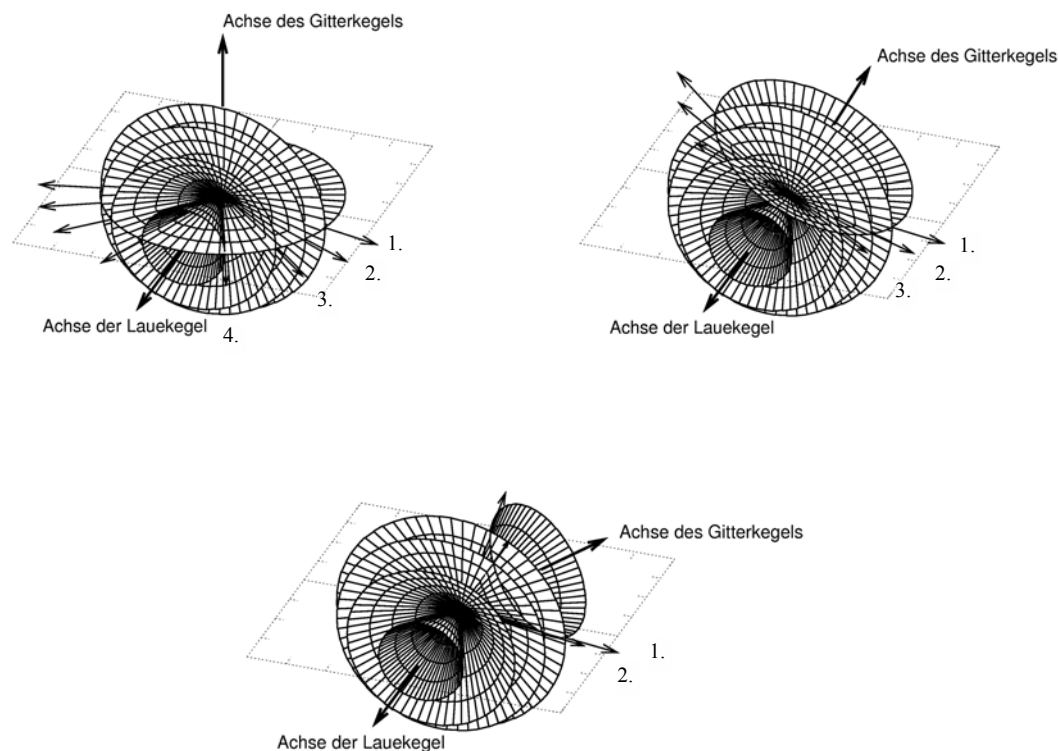


Abbildung 7:
Schnitte des Gitterkegels mit den LAUE-Kegeln für drei verschiedene Stellungen des gekippten Gitters. Die Schnittgeraden geben die Richtungen der Beugungsmaxima an.

net dabei eine Begriffsbildung, die sie schon vom FERMAT-Prinzip her kennen: Aus der Fülle möglicher Wege werden über ein geometrisches Kriterium tatsächliche Wege bestimmt. Während aber beim FERMAT-Prinzip eine Bedingung genügt, werden es bei der Beugung zwei Bedingungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Mit der Rotation des Gitters ändert sich die Geometrie des Versuchsaufbaus und das Beugungsbild wandelt sich. Die zuvor formulierten Bedingungen müssen auf ihre Tragfähigkeit hin untersucht werden und die Analyse zeigt, dass sie weiterhin gültig sind. Geometrische Strukturen zur Ordnung von Erscheinungsreihen erweisen sich als eine erklärungsmächtige Vorgehensweise, die sich im Rahmen der Quantentheorie weiter formalisieren lässt. Wir werden in einem der folgenden Kapitel im Rahmen einer methodischen Zwischenbilanz erläutern, warum wir diese Vorgehensweise anstreben. Der Weg vom gängigen Schulversuch zur Beugung am Gitter hin zu den LAUE-Kegeln bringt also zwei Vorteile:

- zum einen stellt er einen möglichen Übergang zur Röntgenstrukturanalyse als einem Gebiet der Festkörper dar
- zum anderen übt er methodisch Denk- und Erklärungswege, auf denen der Unterricht zur Quantentheorie aufbauen kann. Das so struk-

turierte Curriculum soll einer ontologischen Bewertung von Modellen bei den Schülerinnen und Schülern entgegenarbeiten.

In einem zweiten Teil der Darstellung wollen wir noch aufzeigen, wie eine weitere geometrische Analyse von Bewegungsversuchen am Gitter im Konzept optische Wege auf das *reziproke Gitter* und die EWALD-Kugel führt. Diese Thematik aus der Festkörperphysik wird nur in seltenen Fällen in der Schule zu behandeln sein. - Wir wollen hier auch nicht vorschlagen, diesen Stoff, der meist im universitären Rahmen gelehrt wird, in den Physikunterricht der Schule zu integrieren. Vielmehr geht es ein weiteres Mal darum, die Tragfähigkeit des Konzepts optischer Wege zu demonstrieren und dabei gleichzeitig zu entwickeln, dass dieses Konzept eine Ableitung abstrakter Strukturen wie der des reziproken Gitters aus der Anschaulichkeit experimenteller Gegebenheiten gestattet. Die gegenüber der Anschaulichkeit des Wellenmodells zunächst formaler erscheinende Vorgehensweise im Konzept optischer Wege führt dann beim reziproken Gitter zu einer anschaulichen Ableitung aus dem experimentellen Aufbau.

6. Ausblick: Doppelspalt und Behandlung der Intensität der Beugungsmaxima

Die hier vorgestellten Unterrichtsreihen zur Beugung gehen, sobald geometrische bzw. quantitative Aussagen getroffen werden, von einem Gitter hoher Strichzahl und kleiner Gitterkonstanten aus. Dessen Gitteröffnungen sind klein gegenüber der Breite der Gitterstege. Dadurch ergeben sich scharfe, kontrastreiche Lampenbilder im Beugungsbild. Das Beugungsbild in dieser sehr einfachen, reinen und klaren Form bildet den Ausgangspunkt. In der geometrischen Analyse des Zusammenhangs zwischen Gitterstellung und Beugungsbild muss man nicht für jedes Lampenbild viele optische Wege untersuchen, vielmehr reicht es aus, jeweils nur einen optischen Weg stellvertretend für eine Gesamtheit optischer Wege zu betrachten. Da zunächst Intensitätsunterschiede unberücksichtigt bleiben bzw. ein Versuch gewählt wird, in dem diese Unterschiede sprunghaft und nicht langsam veränderlich auftreten, gibt es noch keine Veranlassung, der Basislänge λ einen Zeiger zuzuordnen.

Sobald man aber im Unterricht vom Gitter zum Doppelspalt voran schreitet, schwankt die Intensität der Lampenbilder in Richtung der vervielfältigten Lampenbilder annähernd proportional zum Quadrat der Sinus- oder Kosinusfunktion. Die Intensität tritt als neue Observable neben der räumlichen Konfiguration der Lampenbilder im Beugungsbild auf. Mit der neuen Observablen lernen die Schüler auch ein neues geometrisches Symbol kennen: die Zeiger. Wie schon die optischen Wege dienen auch sie zur Ordnung der Erscheinungen. Den Intensitätsschwankungen entspricht die Rotation eines Zeigers um die Spitze eines zweiten, gleich langen Zeigers. Die Vektoraddition beider Zeiger ergibt einen neuen, resultierenden Zeiger, dessen Betragsquadrat proportional zum Quadrat des Kosinus des halben Drehwinkels φ ist (Abb. 8). Indem die Schüler zwei Observablen zusammenführen, die räumliche Konfiguration und die Intensität wenig kontrastreicher Beugungsbilder, lernen sie: Optische Wege und rotierende Zeiger können zusammengefasst werden, indem man der Basislänge λ einen Zeiger direkt zuordnet, der bei gleichförmigem Voranschreiten auf der Länge λ sich um 360° dreht; die Zeiger selbst schließen ohne jeglichen Bruch an die bisherigen Ergebnisse zum Gitter an. Es gilt das Inklusionsprinzip. Für den Bezug von Gitter und Doppelspalt haben wir uns stets an den Ausarbeitungen BADERS [21] orientiert, ohne allerdings von Wellenstrahlen zu sprechen. Auch den Einzelspalt und seine Bedeutung für das Beugungsbild eines Gitters haben wir dann nach BADER behandelt.

Den für den Leser vielleicht unerwarteten Gang vom Gitter zum Doppelspalt gehen wir demnach so, dass die Schüler Schritt für Schritt an Erscheinungsserien, die sie verfolgen und kennen lernen, Begriffe wie „optische Wege“ oder „rotierende Zeiger“ erarbeiten. Der Schritt von der Erscheinung

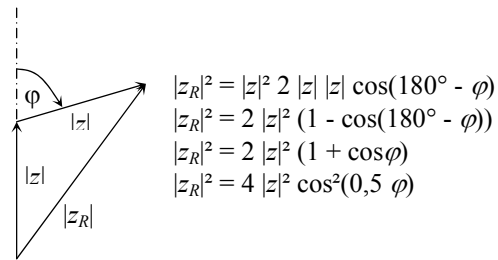


Abbildung 8:

Die Berechnung der Intensität geht aus der Vektoraddition zweier Zeiger des Betrages $|z|$, die sich um die Phase φ unterscheiden, hervor.

hin zum geometrischen Begriff bleibt stets vollkommen klar und transparent. Der Erkenntnisprozess wird den Schülern durch den Unterrichtsgang selbst deutlich. Erst auf diesem Fundament behandeln wir unter dem historischen Aspekt das Wellenmodell. Die formalen Entsprechungen sind dann schnell gefunden und damit wird auch deutlich, dass die Überlegungen im Rahmen des Wellenmodells behandelt werden können. Da aber ein Unterricht ohne anschauliche Modelle vorausgegangen ist, liegt die Versuchung nicht mehr so nahe, die anschauliche Modellvorstellung als „das Eigentliche“ oder gar „das Verursachende“ anzusehen. Eine ontologischen Deutung des Modells [3] wird vermieden. Die Art, wie die Schüler in dieser Unterrichtsreihe Urteile bilden, führt unmittelbar zur Urteilsbildung der Quantenphysik hin: In der Physik untersucht man nicht Objekte, die unabhängig von der Beobachtung, an sich existierend vorgestellt werden können, vielmehr ist Inhalt der Beobachtung, was in geordneten Mess- und Beobachtungshandlungen als zeitliche und räumliche Abfolge sich gegenseitig bedingender Erscheinungen tätig erzeugt wird. Dabei können geometrische Elemente als Ordnungsstrukturen gefunden werden, die den Erscheinungsbedingungen immanent sind. Vor diesem Hintergrund wenden wir uns dann der Physik des 20. Jahrhunderts zu.

7. Methodische Zwischenbilanz

In dem hier dargestellten Ansatz wird der von ERB und SCHÖN im Lichtwegkonzept vorgezeichnete Weg dahingehend zugespitzt, dass gar nicht mehr von einem Lichtstrom bzw. Lichtweg gesprochen wird, sondern räumliche Bedingungen auf Konturen optischer Erscheinungen bezogen werden. Auf diese Weise wird versucht, durch den Gang des Unterrichtes selbst eine physikalische Arbeits- und Denkweise anzulegen, die sich nicht nur inhaltlich (Lichtwegkonzept), sondern auch methodisch bis zur Behandlung der Quantenphysik als tragfähig erweist. Dort gilt es, durch gedankliche bzw. formale und abstrakte Strukturen den Zusammenhang zwischen im Experiment hergestellten Bedingungen

und den entsprechend auftretenden Erscheinungen zu formulieren. Wir erhoffen uns, dass bei einem Unterricht im Konzept optischer Wege es den Schülerinnen und Schülern beispielsweise tatsächlich gelingt, das Photon nicht als Teilchen mit einer wohldefinierten Bahn zu fassen, sondern als einen quantenhaften Wechselwirkungsprozess nach Maßgabe experimenteller Bedingungen.

Wird verzichtet an dieser Stelle des Optikunterrichts auf ein anschauliches Lichtmodell. Die wissenschaftliche Kulturleistung, welche durch die Quantentheorie gegenüber dem Denken in anschaulichen Modellen auftritt, kann damit im Unterricht stärker und ohne methodischen Bruch zum Zug kommen. Es wird angestrebt, dass so die Erklärungs- bzw. Beschreibungsansätze der Quantentheorie von den Schülerinnen und Schülern leichter auch emotional akzeptiert werden können, und dass sich kein Verständnisprozess habitualisiert, der auf eine - vielleicht sehr subtile - ontologische Bewertung anschaulicher Modelle sich gründet.

Die hier vorgestellten Elemente eines möglichen Curriculums zur Beugung zielen auf eine epistemologische Schicht der Physik ab: der Verständnisprozess soll so angelegt werden, dass eine Thematik nicht nur als „verstanden“ oder „erklärt“ gilt, wenn sie auf ein anschauliches Modell zurückgeführt wird, vielmehr bedeutet es auch, eine Sache verstanden zu haben, wenn die immanenten Ordnungselemente herausgearbeitet worden sind. Dieser mehr beschreibende Ansatz liegt der Quantentheorie nahe. In einer empirischen Untersuchung steht damit eine Analyse an, inwiefern die Schülerinnen und Schüler die Physik als ein geschlossenes Gedankengebäude erleben, dass die Quantentheorie einschließt. Desweiteren sollte im Rahmen dieser Analyse auch festgestellt werden, wie von den Schülerinnen und Schülern Modelle bewertet werden, insbesondere, ob sie eine ontologische Deutung erfahren. Nicht zuletzt bleibt festzustellen, ob die schon in der TIMSS/III-Studie beklagte negative Rückwirkung des traditionell-empiristischen Weltbildes auf das Interesse und die akademische Leistung so zu vermeiden ist[22].

2. Teil: Reziprokes Gitter und EWALD-Kugel

8. Bezugnahme zum 1. Teil

Im ersten Teil dieser Darstellung haben wir Grundzüge einer Unterrichtsreihe zur Beugung vorgestellt, in der wir die Beugung modellfrei behandeln: Wir leiten die Eigenschaften der Beugungserscheinungen nicht aus einem Lichtmodell ab, sondern suchen die räumlichen Bedingungen auf, welche in dem Zustandekommen der Erscheinungen jeweils wirksam sind. Diese beschreiben wir im Konzept optischer Wege. Dadurch ordnen wir die Erscheinungsreihen, welche sich durch die Versuche ergeben, und wir beziehen die räumlichen Konfiguration des durchleuchteten Gitters auf die Form des Beugungsbildes. In Anlehnung an FERMAT, der seinen eigenen Äußerungen zufolge mit dem nach ihm benannten Prinzip „... der Natur bezüglich der Lichtbrechung bloß eine bescheidene Hilfe geometrischer Art angeboten...“ habe [23], formulieren wir zwei Bedingungen an die Gesamtheit optischer Wege, mit denen aus der Fülle möglicher optischer Wege genau solche ausgewählt werden, die zur Beschreibung von Beugungsexperimenten mit einem Gitter wesentlich sind:

- *1. Bedingung:* Für benachbarte Gitteröffnungen unterscheiden sich bei einem Beugungsbild n -ter Ordnung die Längen sich entsprechender optischer Wege um $\delta_n = n \cdot \lambda$.
- *2. Bedingung:* Die optischen Wege einer bestimmten Gitteröffnung sind für eine vorgegebene Beugungsordnung alle gleich lang.

Mit diesen beiden Bedingungen ist es uns möglich, die LAUE- und den Gitterkegel einzuführen und so herzuleiten, warum Beugungsbilder beim Kippen des Gitters die Form von Kegelschnitten annehmen. Im zweiten Teil dieses Aufsatzes soll nun die geometrische Analyse genauer ausgearbeitet und der Bezug zum reziproken Gitter und zur EWALD-Kugel aufgezeigt werden.

9. Vom gängigen Schulversuch zum reziproken Gitter und zur EWALD-Kugel

Die Konstruktion für die Richtungen, unter denen im Beugungsbild die Lampenbilder n -ter Ordnung erscheinen, wird in fast jedem Lehrbuch der gymnasialen Oberstufe für einen Versuchsaufbau besprochen, bei dem man mit einem (aufgeweiteten) Laserstrahl ein Gitter hoher Strichzahl und kleiner Gitterkonstanten durchleuchtet und im Anschluss das Beugungsbild auf dem Schirm in der Brennebene einer Linse beobachtet (Abb. 1 im Teil I). Sie soll deshalb hier als bekannt vorausgesetzt werden. - Im Konzept optischer Wege ergibt sich geometrisch die selbe Konstruktion, jedoch wird die Be-

dingung $\delta_n = n \cdot \lambda$ für benachbarte optische Wege nicht im Wellenmodell interpretiert.

Im Folgenden wollen wir von einem Gitter mit einer Gitterkonstanten von $g = 2\mu\text{m}$ und einer Beleuchtung mit $\lambda = 600\text{nm}$ ausgehen. Wir legen unseren Erläuterungen ein spezielles Beispiel zu Grunde und schreiten dann zu allgemeineren Formulierungen fort, damit die Problematik, welche in Bezug auf die Einheiten darzustellen sein wird, an einem konkreten Beispiel leichter verfolgt werden kann.

Ausgangspunkt: eine Aufgabenstellung am gängigen Schulversuch

Abbildung 9 zeigt die Draufsicht auf ein Gitter mit einer Gitterkonstanten $g = 2\mu\text{m}$. Für eine Beleuchtung mit $\lambda = 600\text{nm} = 0,6\mu\text{m}$ findet man die Richtungen für die Lampenbilder 1. und 2. Ordnung im Beugungsbild, indem man auf einem Kreis um einen Gittersteg maßstabsgetreu vom Ursprung O aus die Längen $\delta_1 = 1 \cdot \lambda$ und $\delta_2 = 2 \cdot \lambda$ abträgt. Der Kreis hat dabei einen Durchmesser von der Länge der Gitterkonstanten g , sein Mittelpunkt liegt in der Mitte des entsprechenden Gittersteges. Gemäß des Satzes von THALES sind die Dreiecke OB_1C und OB_2C rechtwinklig.

Weitere geometrische Überlegungen treten hinzu
Verlängert man die Strecken $|OB_1|$ bzw. $|OB_2|$ bis sie eine Kugel K um O in K_1 bzw. K_2 schneiden, so sind zwei weitere rechtwinklige Dreiecke festgelegt: OK_1X_1 und OK_2X_2 . Dies gilt zunächst für jeden beliebigen Radius von K . Dem Dreieck OB_1C im THALES-Kreis entspricht das Dreieck OK_1X_1 , dem Dreieck OB_2C das Dreieck OK_2X_2 . Alle Dreiecke sind rechtwinklig und die einander zugeordneten Dreiecke haben den Winkel $\angle COK_1$ bzw. $\angle COK_2$ gemeinsam. Damit sind in diesen Dreiecken alle Winkel gleich - sie sind ähnlich.

Es gilt:

$$\frac{|OB_1|}{|OC|} = \frac{|OX_1|}{|OK_1|}$$

Sofern die Kugel K den Radius r hat und man außerdem die Basislänge λ und die Gitterkonstante g berücksichtigt, ergibt sich:

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{|OX_1|}{r}$$

Für die n -te Beugungsordnung gilt:

$$\frac{n \cdot \lambda}{g} = \frac{|OX_n|}{r} \Leftrightarrow \frac{n \cdot \lambda}{g} \cdot r = |OX_n|$$

Die Strecken $|OX_n|$ ergeben sich zu ganzzahligen Vielfachen des Quotienten $\frac{\lambda \cdot r}{g}$. Sie liegen äqui-

distant und sind von der Basislänge λ , der Gitterkonstanten g und dem Kugelradius r abhängig. Den Kugelradius r kann man frei wählen, die anderen Größen gibt das Experiment vor.

Physikalische Interpretation der geometrischen Überlegungen

Bei der Wahl des Kugelradius r hat man insbesondere auch die Freiheit, dessen Betrag $|r| = \left| \frac{l}{\lambda} \right|$ zu setzen, wobei man darauf achten muss, dass man sowohl für den Kugelradius r als auch für die Basislänge λ die selben Einheiten verwendet. Man berücksichtigt dann über den Kugelradius die spektralen Eigenschaften der Beleuchtung. Im Einzelnen ergibt sich, sofern alle Größen in μm angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot \lambda}{g} \cdot r = |OX_n| &\Rightarrow |OX_n| = \frac{n \cdot \lambda}{g} \cdot \left| \frac{l}{\lambda} \right| \cdot \mu\text{m} \\ &= \frac{n \cdot \left| \lambda \right| \cdot \mu\text{m}}{\left| g \right| \cdot \mu\text{m}} \cdot \frac{l}{\left| \lambda \right|} \cdot \mu\text{m} = n \cdot \frac{\mu\text{m}}{\left| g \right|} = n \cdot x_l \end{aligned}$$

D.h. für den Fall, dass man den Betrag des Radius der Kugel K als $|r| = \left| \frac{l}{\lambda} \right|$ festlegt, sind die Strecken

$|OX_n|$ unabhängig von der Basislänge und ergeben sich als ganzzahlige Vielfache des Betrags der reziproken Gitterkonstanten $|g|^{-1} = |x_l|$. Sie gehen auf die Struktur des Gitters zurück, wie der Radius der Kugel auf die Eigenschaften der Lampe. Die Struktur des Gitters und die Eigenschaften der Lampe werden auf diese Weise in zwei voneinander unabhängigen geometrischen Elementen dargestellt, deren Schnitt dem anschaulichen Beugungsbild entspricht.

Herausarbeiten von Regeln und Begriffen

Um die Beugungsrichtungen zu finden, kann man also folgendermaßen vorgehen: Von einer beliebigen Gitteröffnung ausgehend zeichnet man im entsprechenden Maßstab zum Gitter senkrechte Geraden mit dem Abstand $n \cdot |g^{-1}| \cdot \mu\text{m}$. Sie bilden ein

neues „Gitter“, welches wir entsprechend des Betrages seiner Gitterkonstanten $|g|^{-1}$ als *reziprokes Gitter* bezeichnen. Die Schnittpunkte des reziproken Gitters mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in der entsprechenden Gitteröffnung liegt und deren

Radius den Betrag $|r| = \left| \frac{l}{\lambda} \right|$ hat, legen in Verbindung

mit dem Ursprung O die Beugungsrichtungen fest. Insbesondere können für nicht monochromatische Beleuchtungen die einzelnen Beugungsrichtungen gefunden werden, indem man *ein* reziprokes Gitter zeichnet und jede Spektrallinie durch eine gesonderte Kugel berücksichtigt. In Anlehnung an die Strukturanalyse in der Festkörperphysik bezeichnen wir die bei diesem Verfahren auftretenden Kugeln als EWALD-Kugeln, wobei wir sowohl für das reziproke Gitter als auch für die EWALD-Kugel unsere Bezeichnungen noch begründen müssen.

Hat man erst einmal dieses Verfahren durchschaut, entfällt die Konstruktion über den THALES-Kreis

aus Abbildung 8. Man entnimmt den Angaben des Experimentes oder der Aufgabenstellung die Gitterkonstante g und die Basislänge λ , um anschließend wie erläutert vorzugehen. Zusätzlich kann man der beschriebenen Zeichnung weitere Informationen unmittelbar entnehmen, die Abbildung 8 in anderer Weise zeigt: Dort wurde eine Basislänge von $\lambda = 600 \text{ nm}$ vorausgesetzt. Für diese Basislänge gibt es drei Beugungsordnungen. Bei abnehmender Basislänge, also einer Beleuchtung, die mehr ins Bläulich-Violette geht, nimmt der Radius der EWALD-Kugel zu. Es treten mehr Beugungsordnungen auf, kommen doch neue Schnittpunkte mit dem reziproken Gitter hinzu. Umgekehrt können im Falle größerer Basislängen bei rötlicher Beleuchtung eventuell überhaupt nur zwei Beugungsordnungen auftreten. Auch die vielen Fragen, die sich bei der Überschneidung einzelner Beugungsordnungen für verschiedene Farben ergeben, kann man so unmittelbar überblicken.

Zum Problem der Einheiten

Bearbeitet man mit den Schülern oder Studenten solche Anwendungsaufgaben, muss man sorgfältig

besprechen, dass Setzungen wie $|r| = \left| \frac{l}{\lambda} \right|$ oder $|g|^{-1} =$

$|x_l|$ nur sinnvoll sind, wenn man durchweg gleiche Einheiten verwendet. Ist dieser Punkt von allen gründlich verstanden, mag man, aber nur unter Verwendung durchweg gleicher Einheiten, für $\tilde{x}_l = \frac{l}{g}$ und für $\tilde{r} = \frac{l}{\lambda}$ setzen, ohne Betragsstriche!

Verwendet man μm als Einheit, so ergibt sich für die Größen \tilde{r} und \tilde{x}_l jetzt die Einheit $(\mu\text{m})^{-1}$.

Wenn man sowohl für $1 \mu\text{m}$ als auch für $1 (\mu\text{m})^{-1}$ den selben Maßstab in der Zeichnung ansetzt, folgt das besprochene Ergebnis. Man kann jetzt zusätz-

Aufgabe 1:

Ein Gitter mit 400 Strichen pro Millimeter, das senkrecht zur optischen Achse steht, wird mit zwei verschiedenen Lasern beleuchtet: $\lambda_1 = 450 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 790 \text{ nm}$. Untersuchen Sie graphisch mit Hilfe der EWALD-Kugel und des reziproken Gitters, wie viele Beugungsordnungen bei den beiden Lasern jeweils beobachtet werden können. Bestimmen Sie außerdem graphisch die Richtungen, unter denen alle auftretenden Beugungsmaxima zu sehen sind.

Hinweis:

Zeichnen Sie in eine Zeichnung sowohl das Gitter ($0,5 \mu\text{m} \equiv 1 \text{ cm}$) als auch das reziproke Gitter mit den beiden EWALD-Kugeln. (Gleicher Maßstab für μm und μm^{-1}).

lich darauf hinweisen, dass hier zwei unterschiedliche Räume, einer für Größen mit der Dimension einer Länge und einer für Größen mit der Dimension einer reziproken Länge, zusammengebracht werden. Der Ursprung beider Räume befindet sich am gleichen Ort. Er kann im Rahmen des hier vorausgesetzten Versuchsaufbaus an jedem beliebigen Ort jeder beliebigen Gitteröffnung festgesetzt werden (vgl. Aufgabe 1).

Die Bedeutung abstrakter Räume in der Physik kann bei dem zuletzt genannten Weg in der Schule nicht nur vorbereitet, sondern auch am Experiment entwickelt werden. Der Sprung ins Abstrakte ergibt

sich dann nicht aus mathematischen Definitionen, die ohne experimentellen Vorlauf und Überblick dem Schüler bzw. Studenten oft willkürlich erscheinen, sondern als vertiefte Analyse experimenteller Gegebenheiten.

Den Lernenden ist im Rahmen der hier vorgeschlagenen Unterrichtsreihe der Begriff des *reziproken Gitters* durchaus plausibel, während ihnen der Name EWALD-Kugel einfach analog zu vielen vergleichbaren Bezeichnungen in der Physik mitgeteilt wird. Den Bezug zu den entsprechenden Begriffen der Festkörperphysik sieht diese Unterrichtsreihe nicht vor. Wir wollen, wie oben bereits angekün-

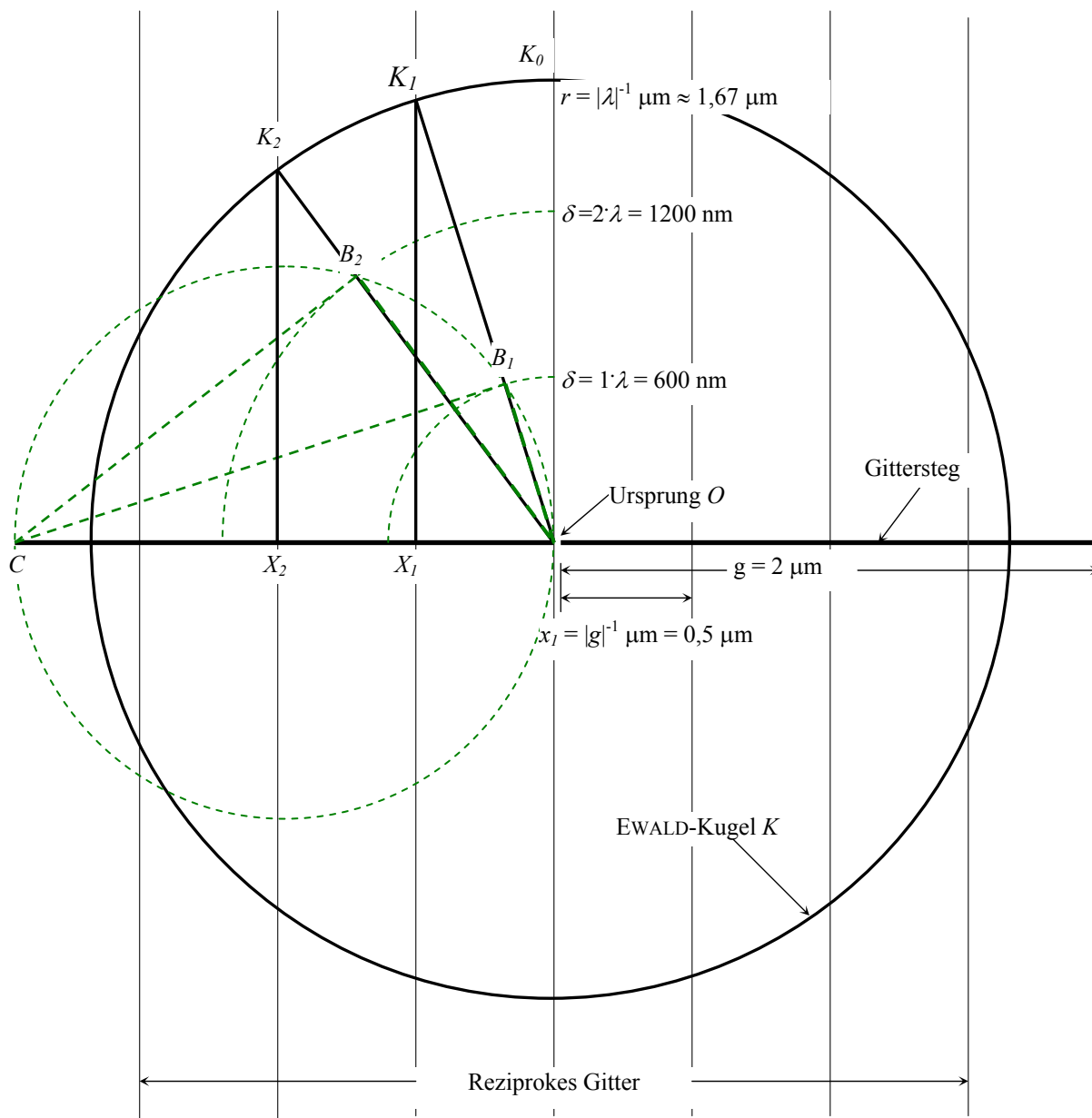


Abbildung 9:
 Draufsicht auf ein Gitter mit $g = 2 \mu\text{m}$. Die vertikalen Geraden stellen das reziproke Gitter dar. Ihre Schnittpunkte mit der EWALD-Kugel geben die Beugungsrichtungen an.

dig, für den interessierten Leser aber trotzdem kurz aufzeigen, dass sich unsere Begriffsbildung geometrisch gesehen bruchlos an die Festkörperphysik anschließt:

Dort wird die Beugung meist so formuliert: Photonen werden an einem Kristall elastisch in die Richtungen konstruktiver Interferenz gestreut, wenn sich die Wellenzahlvektoren des einfallenden und des gestreuten Photons um einen Vektor des reziproken Gitters unterscheiden. - Bis auf einen Faktor 2π entspricht in unserer Terminologie der Vektor OK_0 dem Wellenzahlvektor des einfallenden Photons. Dieser Vektor zeigt genau in die Richtung der optischen Wege vor dem Gitter, was im Photonenbild die Richtung des einfallenden Photons bedeutet. Die Richtungen der gestreuten Photonen sind die Richtungen der hellen Flecken im Beugungsbild. Bis auf einen Faktor 2π sind die Vektoren OK_n für $n \neq 0$ identisch mit den Wellenzahlvektoren der gestreuten Photonen. Schließlich entsprechen die Strecken $x_n = OX_n$ ebenfalls bis auf den Faktor 2π dem reziproken Gittervektor [24]. Aus Abbildung 9 kann unmittelbar abgelesen werden, wie die Anfangs- und Endpunkte der Differenzvektoren von OK_0 und OK_n auf Geraden mit den Abstandsvektoren $x_n = OX_n$ und auf der EWALD-Kugel liegen. Für den Vergleich mit der Festkörperphysik mag noch angefügt werden, dass es sich bei dem besprochenen Gitter um ein Gitter mit eindimensionaler Gitterperiodizität handelt und alle Gitterstege in einer Ebene liegen. Die räumliche Begrenzung auf eine Ebene „unendlicher“ Dünne und die vergleichsweise große („unendliche“) Länge der Gitterstege bedingen die „unendliche“ Erstreckung des reziproken Gitters als Geraden, die in Richtung der Gitterstege „unendlich“ dünn sind (durchgängige Reziprozität).

Kennt man die LAUE-Kegel, den Gitterkegel und die EWALD-Kugel, so findet man einen weiteren spannenden Bezug zum reziproken Gitter. Die LAUE-Kegel schneiden aus der EWALD-Kugel Kreise heraus, welche in Ebenen senkrecht zur Gitterebene und parallel zu den Gitterstegen liegen. Entsprechend schneidet der Gitterkegel, welcher in dem hier als Ausgangspunkt gewählten Versuchsaufbau zu einer Ebene entartet, einen Kreis aus der EWALD-Kugel aus. Die Schnitte der Ebenen, welche auf die LAUE-Kegel zurück gehen mit der Ebene, die auf den Gitterkegel zurück geht, ergeben genau das reziproke Gitter. Es wird so zu einer geometrischen Struktur, die sich aus den von uns formulierten Bedingungen an die optischen Wege „herauskristallisiert“.

10. Reziprokes Gitter und EWALD-Kugel bei Rotationen des Gitters

Rotiert das Gitter, sei es durch Drehen, Schwenken oder Kippen (vgl. 1. Teil), so ändert sich die Geo-

metrie des Versuchsaufbaus. Im Konzept optischer Wege können aber weiterhin alle Abwandlungen der Beugungsbilder durch diese Rotationen über die beiden Bedingungen an die optischen Wege gefasst werden. Wir untersuchen im Folgenden, welche Konsequenzen das für die Lage von reziprokem Gitter und EWALD-Kugel hat.

1. Drehen

Bei Drehungen eines gut ausgeleuchteten Gitters ändert sich an den geometrischen Betrachtungen des vorangegangenen Kapitels nichts. Das reziproke Gitter dreht mit dem Gitter mit. Der Mittelpunkt der EWALD-Kugel und der Ursprung des reziproken Gitters fallen weiterhin zusammen.

2. Schwenken

Für benachbarte Gitteröffnungen unterscheiden sich vor dem Gitter die optischen Wege um die Strecke s (Abb. 10). Um der von uns formulierten 1. Bedingung zu genügen, müssen vom Ursprung O aus die Strecken $s + n \cdot \lambda$ auf einem Kreis mit dem Durchmesser der Gitterkonstanten g und dem Mittelpunkt in der Mitte des Gittersteges abgetragen werden. Die so erhaltenen Schnittpunkte mit der Kreisperipherie und die beiden Endpunkte des Gittersteges bilden wieder die rechtwinkligen Dreiecke OCB_n . Der Kreis ist THALES-Kreis dieser Dreiecke. Die Verlängerungen der abgetragenen Strecken über die Schnittpunkte mit dem THALES-Kreis hinaus schneiden die EWALD-Kugel in den Punkten K_n (Betrag des Radius $|r| = |\lambda|^{-1}$). Zu den Gitterstegen senkrechte Geraden durch diese Schnittpunkte legen die Punkte X_n fest. Die Dreiecke OCB_n sind mit den Dreiecken OX_nK_n ähnlich (vgl. voriges Kapitel).

Im Einzelnen gelten unter Verwendung der Einheit μm und mit $\Delta x_n = |X_n X_0|$:

$$\frac{s}{g} = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{\left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \mu\text{m}} = \frac{|\lambda| \cdot x_0}{\mu\text{m}} \quad (1)$$

$$\frac{s + n \cdot \lambda}{g} = \frac{x_0 + \Delta x_n}{\left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \mu\text{m}} \quad (2)$$

$$\frac{s}{g} + \frac{n \cdot \lambda}{g} = \frac{|\lambda| \cdot x_0}{\mu\text{m}} + \frac{|\lambda| \cdot \Delta x_n}{\mu\text{m}}$$

(1) in (2) eingesetzt vereinfacht (2) zu:

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \mu\text{m} \cdot n \cdot \frac{1}{g} &= \frac{|\lambda| \cdot \Delta x_n}{\mu\text{m}} \\ \Delta x_n &= n \cdot \frac{(\mu\text{m})^2}{g} = n \cdot \frac{\mu\text{m}}{|g|} = n \cdot |x_1| \cdot \mu\text{m} = n \cdot x_1 \end{aligned}$$

Die Strecken $\Delta x_n = |X_n X_0|$ sind ganzzahlige Vielfa-

che der Strecke x_l mit $|x_l| = \left| \frac{1}{g} \right|$. Die Geraden durch X_n und K_n bilden auch hier das reziproke Gitter mit einer Gitterkonstanten vom Betrag $|x_l|$. Im Versuch verschiebt sich mit dem Schwenken des Gitters das reziproke Gitter gegen die EWALD-Kugel. Die EWALD-Kugel behält ihren Ursprung, während der Ursprung des reziproken Gitters auf dem Gittersteg wandert. Dabei stehen die Geraden des reziproken Gitters stets senkrecht auf ihm. In

der „Anbindestelle“ des reziproken Gitters an die EWALD-Kugel schneidet sich die Gerade des reziproken Gitters, die auch durch dessen Ursprung läuft, mit einem optischen Weg, der zur nullten Ordnung gehört. Den Ursprung des reziproken Gitters findet man also, wenn man vom Schnittpunkt dieses optischen Weges mit der EWALD-Kugel auf den Gittersteg ein Lot fällt.

Beim Schwenken des Gitters verschieben sich die EWALD-Kugel und das reziproke Gitter gegenein-

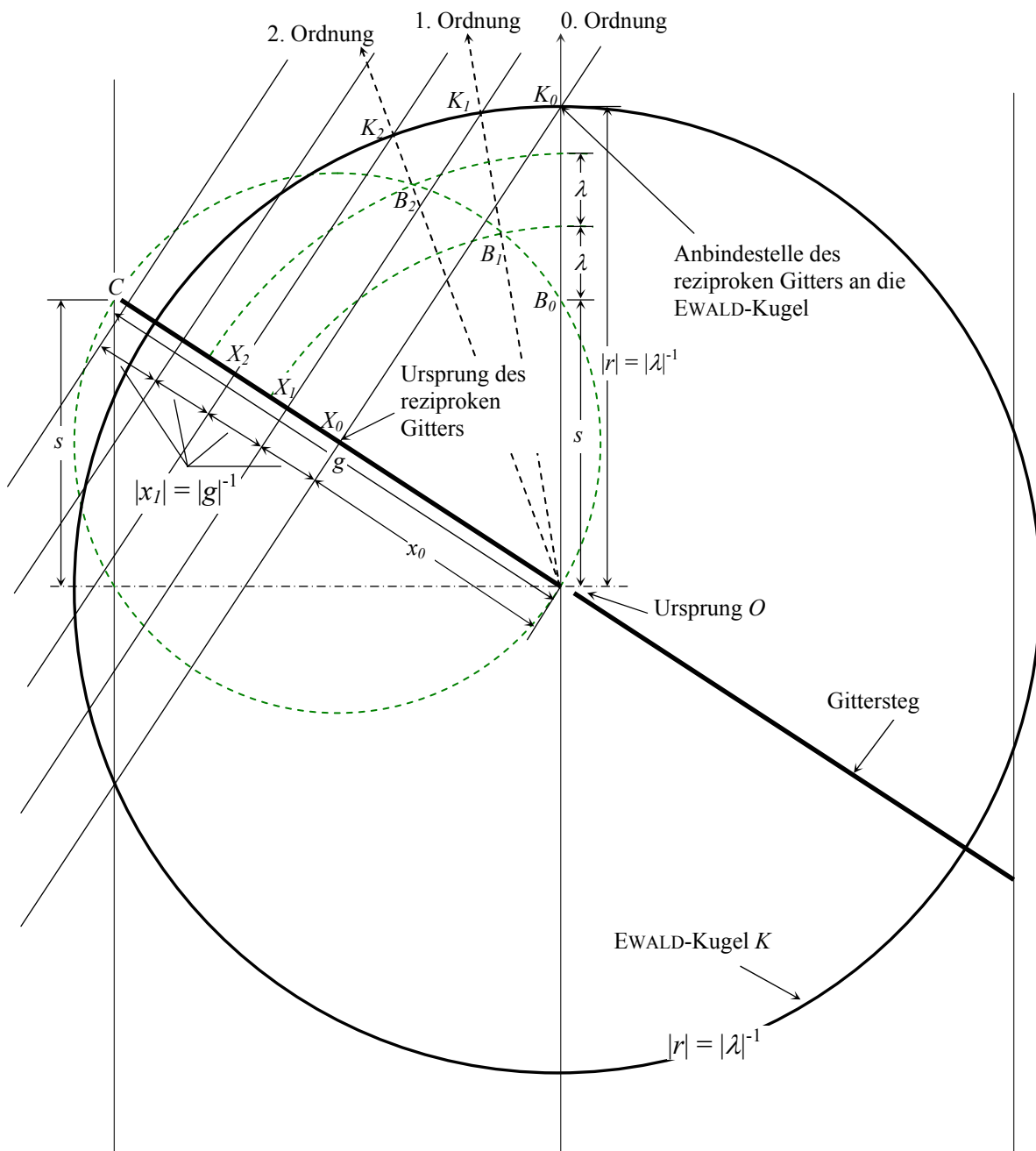


Abbildung 10:
 Draufsicht auf ein geschwenktes Gitter. Die Geraden des reziproken Gitters stehen senkrecht zu den Gitterstegen. Der Ursprung des reziproken Gitters ist zum Ursprung EWALD-Kugel um x_0 verschoben.

ander; die Richtungen der Lampenbilder n -ter Ordnung im Beugungsbild sind weiterhin durch die Schnitte von reziprokem Gitter und EWALD-Kugel gegeben.

Ergänzte man in Abbildung 10 auch rechts vom Ursprung die Geraden des reziproken Gitters, könnte man aus der Zeichnung unmittelbar ablesen, warum beim Schwenken des Gitters im Beugungsbild die Lampenbilder rechts und links von der nullten Ordnung unterschiedlich schnell auseinander laufen.

3. Kippen

Kippt man das Gitter, so sind die optischen Wege einer Gitteröffnung vor und hinter dem Gitter unterschiedlich lang. Die von uns formulierte 2. Bedingung an die optischen Wege veranlasste uns, im ersten Teil den Gitterkegel einzuführen, während die von uns formulierte 1. Bedingung zu den LAUE-Kegeln führte.

Die LAUE-Kegel schneiden aus einer EWALD-Kugel, deren Mittelpunkt in einer Gitteröffnung sitzt, Kreise heraus. Diese Schnittkreise liegen in Ebenen, welche alle voneinander um den Betrag

$$|x_l| = \left| \frac{l}{g} \right|$$

voneinander entfernt sind - sofern man in der Draufsicht der Abbildung 6 die Dreiecke OX_nK_n um eine Achse durch die Gitterstege rotieren lässt, wird dieser Zusammenhang unmittelbar klar. Der Gitterkegel schneidet ebenfalls aus der EWALD-Kugel einen Schnittkreis heraus. Dessen Ebene schneidet die Ebenen, welche auf die Schnittkreise der LAUE-Kegel zurückgehen, in Geraden, die alle im Abstand von x_l parallel zueinander liegen und senkrecht auf dem gekippten Gitter stehen. Sie bilden das reziproke Gitter. Auch hier ist der Ursprung des reziproken Gitters gegen den Mittelpunkt der EWALD-Kugel verschoben. Die Gerade des reziproken Gitters, die durch dessen Ursprung läuft, schneidet, wie schon beim Schwenken, den optischen Weg, der zur nullten Ordnung gehört, auf der EWALD-Kugel. Auch hier findet man umgekehrt den Ursprung des reziproken Gitters, indem man ein entsprechendes Lot fällt.

Sämtliche Beugungsordnungen lassen sich damit nach folgender Vorschrift finden: Ein beliebiger Punkt der Gitteröffnung bildet den Mittelpunkt der EWALD-Kugel mit einem Radius vom Betrag

$$|r| = \frac{l}{|\lambda|}$$

Ein Lot parallel zur optischen Achse durch den Mittelpunkt der EWALD-Kugel schneidet diese in der „Anbindestelle“ des reziproken Gitters an die EWALD-Kugel. Das Lot von der Anbindestelle auf die Gitterebene bestimmt den Ursprung des reziproken Gitters. Das reziproke Gitter besteht aus zu diesem Lot parallelen Geraden, die in einem

Abstand vom Betrag $|x_l| = \frac{l}{|g|}$ zueinander liegen.

Sie sind Elemente einer Ebene parallel zur Richtung, in welcher man die Gitterkonstante g angibt. Die Vektoren vom Ursprung der Ewald-Kugel zu deren Schnittpunkten mit dem reziproken Gitter geben die Richtungen der Lampenbilder im Beugungsbild an. Rotationen des Gitters entsprechen in einem „Reziprokraum“ Translationen zwischen reziprokem Gitter und EWALD-Kugel.

11. Danksagung

Wir danken der Software AG-Stiftung für die großzügige Unterstützung dieser Arbeit.

-
- [1] FEYNMAN, R. P.: QED – Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie. München: Piper, 1988.
 - [2] ERB, R.: Berechnung von Beugungsbildern. - MNU **48** (1995), S. 281-284.
 - [3] BADER, F.: Eine Quantenwelt ohne Dualismus. - Hannover: Schroedel, 1996.
 - [4] WERNER, J.: Vom Licht zum Atom. - Berlin: Logos, 2000.
 - [5] ERB, R.: Optik mit Lichtwegen. - Bochum - Magdeburg: Westarp Wissenschaften, 1994.
 - [6] ERB, R. - L. SCHÖN, L.: Ein Blick in den Spiegel – Einblick in die Optik. In: Fischer, H.E. (Hrsg): Handlungs- und kommunikationsorientierter Unterricht in der Sek. II. Bonn: F. Dümmers Verlag, 1996.
 - [7] WEBER, T.: Kumulatives Lernen im Physikunterricht. Dissertation. Berlin: 2002, in Druck.
 - [8] MAIER, G.: Über die Natur der Beugungsphänomene I. - Elemente der Naturwissenschaft **35** (1981), S. 26-42.
 - [9] MAIER, G.: Über die Natur der Beugungsphänomene II. - Elemente der Naturwissenschaft **40** (1984), S. 42-52.
 - [10] MAIER, G.: Die Fraunhoferschen Beugungsercheinungen in ihrem Bezug zur Gestalt der Blende. In: MAIER, G.: blicken-sehen-schauen. Beiträge zur Physik als Erscheinungswissenschaft. Hrsg.: GREBE-ELLIS, J., - Dürna: Kooperative Dürna 2004.
 - [11] MACKENSEN, M. V. & OHLENDORF, H.-C.: Modellfreie Optik. - Kassel: Pädagogische Forschungsstelle 1998.
 - [12] SEIPP, H.: Die Grundversuchsanordnung für die Lichtbeugung an Kanten. - Elemente der Naturwissenschaft **76** (2002), S. 35-50.
 - [13] HECHT, E.: Optik. S. 707. München, Wien: Oldenbourg 2001.
 - [14] MAIER, G.: Optik der Bilder. 5. Auflage. - Dürna: Verlag der Kooperative Dürna 2003.

- [15] MACKENSEN, M. V. - OHLENDORF, H.-C.: *Modellfreie Optik*. - Kassel: Pädagogische Forschungsstelle 1998.
- [16] UCKE, C. & WOLF, R.: *Durch Farbe in die dritte Dimension*. Physik in unserer Zeit **30** (1999), S. 50.
- [17] GREBE-ELLIS, J., SOMMER, W., VOGT, J.: *Abituraufgaben zur Hebung, Beugung und Polarisation. Materialien für einen modellfreien Optikunterricht im Grund- und Leistungskurs Physik*. Kassel: Pädagogische Forschungsstelle 2002.
- [18] PLANCK, M.: *Das Wesen des Lichts*. – Die Naturwissenschaften **7** (1919), S.903-909.
- [19] Man denke beispielsweise an die Bestimmung der Brechzahl von Wasser über die optische Hebung am Wassertrog: Mit einfachsten Mitteln und guter Genauigkeit kommen Schüler zu dem Ergebnis, dass für senkrechten Blick auf die Wasseroberfläche der Trogboden um ein Viertel der tastbaren Tiefe gehoben erscheint und sich damit *Tastweg* und *Sehweg* verhalten wie 4:3.
- [20] MACKENSEN, M. V.: *Private Mitteilung*.
- [21] BADER, F.: *Physik 12/13. Gymnasium Sek II*. S. 187. Hannover: Schroedel 2000.
- [22] BAUMERT, J., BOS, W., LEHMANN, R.: *Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn*. Band 2. Opladen: Leske + Ulrich, 2000, S. 267.
- [23] FERMAT, P.: zitiert nach: SIMONY, K.: *Kulturgeschichte der Physik*. Frankfurt/M: Harri Deutsch, 1990.
- [24] KOPITZKI, K.: *Einführung in die Festkörperphysik*. Stuttgart: B. G. Teubner 1989.