

VERBLÜFFENDE SPANNUNGSMESSUNGEN: EXPERIMENTE ZU EINEM ELEKTRODYNAMISCHEN PARADOXON

Rolf Pelster¹, Ingo Hüttl

Institut für Physik und ihre Didaktik, Gronewaldstraße 2, D-50931 Köln

(Eingegangen: 18.10.2003; Angenommen: 04.04.2004)

Kurzfassung

Wir besprechen ein Demonstrationsexperiment zur Induktion, das zu paradoxen Spannungsmessungen führt, und zeigen die Problematik einer rein formalen Erklärung auf. Um ein tieferes Verständnis zu ermöglichen, stellen wir ergänzende Versuchsanordnungen vor. Diese erlauben es, die Verteilung induzierter elektromotorischer Kräfte in homogenen wie inhomogenen Leitern nachzuweisen. Sie machen deutlich, was man mit Voltmetern an Anordnungen mißt, die zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldern ausgesetzt sind.

1. Einleitung

Im folgenden besprechen wir ein sogenanntes „elektrodynamisches Paradoxon“. Dies ist ein Demonstrationsexperiment zum Induktionsgesetz, das im deutschsprachigen Raum aber kaum bekannt ist [1,2,3,4,5]. Mit ihm lassen sich besonders deutlich Besonderheiten zeitlich veränderlicher elektromagnetischer Felder vor Augen führen, insbesondere die Problematik von Spannungsmessungen: so ist es doch äußerst verwunderlich, daß ein an zwei festen Punkten angeschlossenes Voltmeter je nach räumlicher Lage der Meßanordnung unterschiedliche, aber wohldefinierte Spannungen anzeigen kann (siehe Abb. 1). Elektrische Felder, die durch magnetische Wechselfelder entstehen, verhalten sich ganz anders als solche, die auf Coulomb-Kräften zwischen Ladungen beruhen.

Die Grundform des Versuchs ist in Abb. 2 skizziert. Eine von Wechselstrom durchflossene Spule mit magnetischem Kern erzeugt einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß $\Phi(t)$. Um die Spule wird nun ein leitender Ring gelegt, der zwei Widerstände $R_1 \neq R_2$ enthält. In diesem Ring wird auf Grund der Flußänderung eine elektromotorische Kraft induziert, infolge derer ein Wechselstrom fließt. Schließt man nun ein Voltmeter an die Punkte a und b an, so hängt die gemessene Spannung davon ab, ob sich das Voltmeter auf der Seite von R_1 oder R_2 befindet. Dabei spielt es keine Rolle, ob ein analoges oder ein digitales Gerät benutzt wird. Insbesondere erhält man ein wohldefiniertes und reproduzierbares Ergebnis, $|U_{mess,1}/U_{mess,2}| = R_1/R_2$, wenn der magne-

tische Streufluß im Bereich der äußeren Meßschleifen (weiße Flächen in Abb. 2b) hinreichend klein ist. Experimentell läßt sich dies auf mehrere Arten realisieren. Zum einen kann man den gesamten magnetischen Fluß auf die Spule bzw. ihren Kern konzentrieren. Dazu verwendet man entweder eine sehr lange Spule mit Kern (Abb. 2a und Ref. [3]) oder eine kurze Spule, bei der man die magnetischen Feldlinien außerhalb der gezeigten Leiter-schleifen über einen geschlossenen Kern in sich zurückführt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Anschlußkabel der Voltmeter sehr nah am Kreisring zu verlegen, so daß die eingeschlossene Fläche gegen Null geht (Abb. 1 und Ref. [1]). Wie bei *Paradoxa* üblich, steht das Phänomen nicht im Widerspruch zu physikalischen Gesetzen, sondern zu unserer Erwartungshaltung: wir sind es bei Schaltkreisen, in denen Gleich- oder Wechselströme fließen, gewohnt, unabhängig von der genauen Lage des Voltmeters eine feste Spannung zwischen den Meßspitzen an zwei Punkten a und b abgreifen zu können. Je mehr praktische Erfahrung



Abb.1: Verblüffenderweise zeigen zwei Voltmeter unterschiedliche Wechselspannungen an (in mV), obwohl sie an denselben Punkten eines stromdurchflossenen Widerstands-rings angeschlossen sind (vgl. Abb. 2). Das Verhältnis der Spannungen $|U_{mess,1}/U_{mess,2}| \approx 1,76$ entspricht dem der Widerstände $R_1 = 67,9 \Omega$ und $R_2 = 38,5 \Omega$.

¹ e-mail: rolf.pelster@uni-koeln.de

die Studenten im Umgang mit Spannungsmeßgeräten haben, desto überraschender ist für sie daher der beschriebene Effekt. Die Erklärungsversuche offenbaren meist grundlegende Mängel im Verständnis, selbst wenn eine Vorbildung auf dem Gebiet der Elektrodynamik gegeben ist. Verwandte Probleme bzw. Übungsaufgaben finden sich in den Ref. [6,7]. Der Effekt ist auch von praktischer Bedeutung, beispielsweise bei der Messung von Flußänderungen an supraleitenden Zylindern [8,9].

In Abschnitt 2 geben wir zunächst in kurzer Form die theoretische Erklärung des Versuches wieder. Wir zeigen dann in Abschnitt 3, wie ein gut gewähltes Ersatzschaltbild ein leichteres Verstehen ermöglicht. In den folgenden Abschnitten 4 und 5 stellen wir ergänzende Experimente vor. Diese demonstrieren, wie sich induzierte elektromotorische Kräfte entlang homogener und inhomogener Leitungen verteilen und zeigen, was Voltmeter an Anordnungen messen, die zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldern ausgesetzt sind.

2. Zur Standardversion des Experiments

Die zeitlich veränderliche magnetische Flußdichte \vec{B} induziert ein elektrisches Feld, $\vec{E} \perp \vec{B}$, welches auf die Kreisschleife einwirkt. Nach dem Faradayschen Induktionsgesetz (eine der Maxwellschen Gleichungen) gilt dann für das geschlossene Linienintegral

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet A die umschlossene schattierte

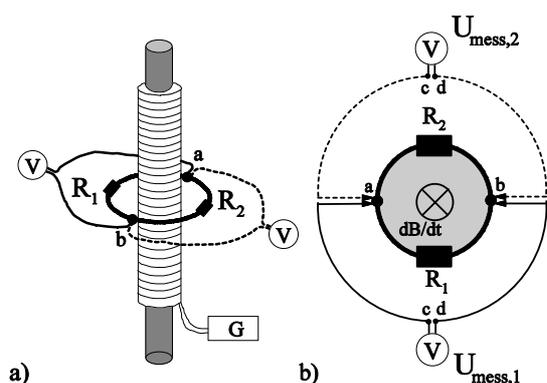


Abb.2: a) Standardversuch zu einem „elektrodynamischen Paradoxon“. Der Generator G erzeugt mittels einer Spule ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. a und b bezeichnen die Kontaktpunkte des Widerstandsringes, an denen die Meßkabel angeschlossen sind. b) Aufsicht mit R_1 - bzw. R_2 -seitiger Spannungsmessung. Die magnetische Flußdichte \vec{B} durchstößt die Blattebene, wobei die Feldverteilung bezüglich der Achse a - b symmetrisch ist (vgl. auch Abb. 1). c und d bezeichnen die Eingänge der Voltmeter.

Fläche in Abb. 2. \mathcal{E} wird als elektromotorische Kraft (EMK) bezeichnet und hat die Dimension einer Spannung (Energie pro Ladung), ist aber im Gegensatz zu den wegunabhängigen Potentialdifferenzen der Elektrostatik nicht auf konservative Coulomb-Kräfte zurückzuführen [4]. Nach dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz treibt die EMK in der Kreisschleife einen Strom

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

an, wobei wir vorausgesetzt haben, daß der Widerstand der Leitungen gegenüber $R_1 + R_2$ vernachlässigt werden kann. Der Stromfluß wiederum führt zu einem Spannungsabfall $U_1 = R_1 I$ bzw. $U_2 = -R_2 I$ an den Widerständen. Es gilt

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \mathcal{E} \quad (3)$$

$$U_2 = - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathcal{E} \quad (4)$$

wobei das Vorzeichen der Unterscheidung der relativen Polung bzgl. a und b dient (Stromfluß $a \rightarrow b$ bzw. $b \rightarrow a$). Wie bereits ausgeführt gehen wir davon aus, daß nur im Bereich der inneren Fläche A ein nennenswerter magnetischer Fluß herrscht (grau schattiert in Abb. 2b). Bei der R_1 -seitigen Spannungsmessung umschließt die Meßschleife vom Eingang c des Voltmeters über a , R_1 und b zurück zum Eingang d somit keine Flußänderung, so daß dort die Summe aller induzierten EMK verschwindet und das Voltmeter direkt $U_{mess,1} = U_1$ anzeigt.

Analog gilt auch $U_{mess,2} = U_2$. Es ergibt sich damit aus Gl. 3 und Gl. 4 das experimentell überprüfbare Spannungsverhältnis

$$\frac{U_{mess,1}}{U_{mess,2}} = - \frac{R_1}{R_2} \quad (5)$$

Einfache Voltmeter zeigen lediglich die Effektivwerte der Wechselfspannungen an. Die unterschiedlichen Vorzeichen in Gl. 3 und 4 entsprechen einer Phasenverschiebung von 180° und können leicht mittels eines Oszilloskops sichtbar gemacht werden (siehe Ref. [5]). Darüber hinaus läßt sich aus den gemessenen Effektivspannungen auch der Effektivwert der induzierten EMK zu $|\mathcal{E}| = |U_{mess,1}| + |U_{mess,2}|$ bestimmen (siehe Gl. 3 und 4).

Im obigen Induktionsexperiment erzeugt die EMK also zunächst einen durch die gesamte Leiterschleife fließenden Strom, der wiederum zu Spannungsabfällen an einzelnen ohmschen Widerständen führt.

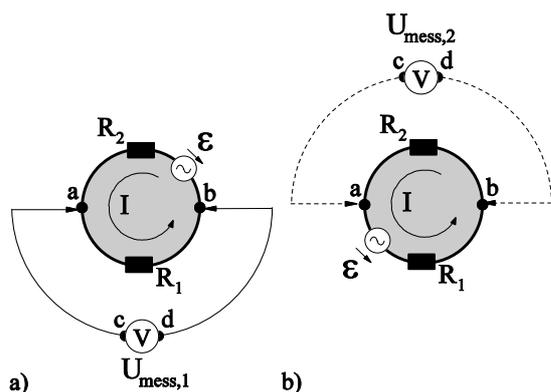


Abb. 3: Falsches Ersatzschaltbild zu Abb. 2. Je nach Meßanordnung befindet sich ein die induzierte EMK \mathcal{E} tragender Generator im oberen bzw. unteren Halbkreis der Leiterschleife. Die Pfeile an den Generatoren geben ihre momentane Polung (entgegengesetzt der technischen Stromrichtung) an.

Deren unterschiedliche Werte, $U_1 = R_1 I$ bzw. $U_2 = -R_2 I$, werden gemessen. **Die Wirkung als Paradoxon beruht darauf, daß der Betrachter i. a. fälschlicherweise erwartet, man könne mit einem Voltmeter immer eine feste Potentialdifferenz zwischen den Meßspitzen an den Punkten a und b abgreifen.** Statt dies nun herauszuarbeiten, versuchen selbst Hochschullehrer oftmals, die scheinbare Paradoxie mittels des in Abb. 3 gezeigten Ersatzschaltbildes noch zu verstärken. Dabei wird die in der Kreisschleife induzierte EMK \mathcal{E} als Spannungsgenerator jeweils in die dem Voltmeter abgewandte Halbschleife eingezeichnet. Damit tragen alle das Gebiet der Flußänderung umschließenden Maschen die EMK, während die flußfreien Maschen den Generator nicht enthalten. Die Voltmeter messen somit direkt die Spannungsabfälle an den jeweiligen Widerständen, und man überzeugt sich leicht davon, daß die Gleichungen 2-5 erfüllt sind. Die zugrundeliegende Modellvorstellung ist allerdings absurd. Ein Generator, der je nach Annäherung des Betrachters von einem Ort zum anderen springt, wäre in der Tat ein echtes physikalisches Paradoxon! Zwar wirkt das Experiment so, als ob man je nach Lage des Voltmeters an verschiedenen Schaltkreisen mißt, zum tieferen Verständnis trägt diese Sichtweise aber nicht bei. Zum einen kann man die beiden Spannungsmessungen ja auch gleichzeitig durchführen, so daß eine Beschreibung durch zwei getrennte Ersatzschaltbilder nicht mehr zu rechtfertigen ist.² Zum anderen wird man nach

² Zwar kann man, wie in Ref. [3] gezeigt, diese zu einer Schaltung zusammenfassen, allerdings ergeben sich dann verschiedene Anschlußpunkte für die beiden Volt-

meter, was nicht mehr der tatsächlichen Meßgeometrie entspricht.

3. Verständnisschwierigkeiten

3.1 Was messen Voltmeter?

Wie bereits angesprochen, muß anschaulich erklärt werden, weshalb die Voltmeter im obigen Experiment keine feste Spannung zwischen den Meßspitzen an den Punkten a und b abgreifen. Letzteres sind wir von gewöhnlichen Messungen her gewohnt: bei hinreichend großem Innenwiderstand des Gerätes sind Ströme in den Meßkabeln zwischen c und a bzw. d und b vernachlässigbar klein, so daß es dort zu keinem weiteren Spannungsabfall kommt. Im Bereich zeitlich veränderlicher elektromagnetischer Felder werden aber auch in den Zuleitungen elektromotorische Kräfte induziert, die nicht außer acht gelassen werden dürfen. Auf die Verteilung der EMK beim obigen Experiment wurde bereits in Ref. [4] hingewiesen. Wir zeigen nun in Abb. 4 ein entsprechendes Ersatzschaltbild und erläutern dies. Wir gehen zunächst davon aus, daß die Kontaktpunkte a und b so gewählt sind, daß sie den Kreisring in zwei Halbbögen gleicher Länge teilen. Bei Verwendung eines Spulenkerns mit quadratischem oder rundem Querschnitt (Abb. 1, 2) weist das magnetische und somit auch das induzierte elektrische Feld eine Symmetrie bezüglich der Achse $a-b$ auf. Daher ist die induzierte EMK, $\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{s} = \left(\int_a^b \vec{E} d\vec{s} \right)_{\cap} + \left(\int_b^a \vec{E} d\vec{s} \right)_{\cup}$ zu gleichen Teilen auf den oberen (\cap) und unteren (\cup) Halbbogen verteilt.³ Unter Berücksichtigung der Laufrichtung von a nach b ergibt sich entlang der Halbbögen $\left(\int_a^b \vec{E} d\vec{s} \right)_{\cap} = \mathcal{E}/2$ und

meter, was nicht mehr der tatsächlichen Meßgeometrie entspricht.

³ Im Gegensatz zum geschlossenen Linienintegral (Gl. 1) könnte für die Linienintegrale über einfache, nicht in sich geschlossene Wege auch der schulübliche Begriff der Quellspannung verwendet werden. Wir behalten aber durchgehend den Begriff EMK bzw. Teil-EMK bei.

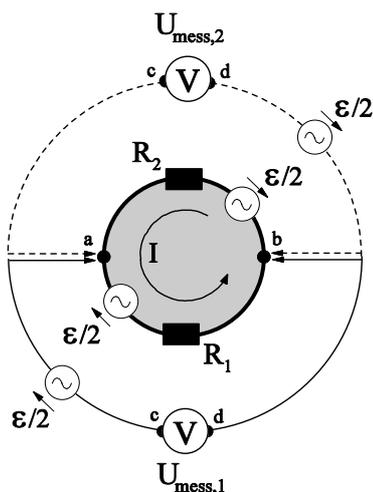


Abb. 4: Ersatzschaltbild zu Abb. 2. Der Innenwiderstand der Voltmeter sei so groß, daß Spannungsabfälle auf Grund von Strömen in den Zuleitungen (c - a bzw. d - b) vernachlässigt werden können. Des weiteren wird davon ausgegangen, daß für den induktiven Widerstand des inneren Kreisleiters $\omega L \ll R_1 + R_2$ gilt (andernfalls sind die Widerstände R_1 und R_2 durch die entsprechenden komplexen Impedanzen zu ersetzen).

$$\left(\int_a^b \vec{E} d\vec{s} \right)_{\text{U}} = - \left(\int_b^a \vec{E} d\vec{s} \right)_{\text{U}} = -\mathcal{E}/2 \quad (\text{die Vorzeichen}$$

werden in Abb. 4 durch Pfeile angedeutet). Aber auch die Maschen, die ein Voltmeter und den auf der ihm abgewandten Seite liegenden Widerstand enthalten, umfassen den Bereich der Flußänderung und müssen insgesamt die EMK \mathcal{E} tragen. Dies ist nur möglich, wenn die Zuleitungen (Wege von a über ein Voltmeter nach b) jeweils den Anteil $\mathcal{E}/2$ tragen, wobei deren genauer räumlicher Verlauf gar keine Rolle spielt. Der Einfachheit halber sehen wir die Voltmeter idealisiert als hinreichend klein an, so daß diese induzierte EMK lediglich den Kabeln zuzuschreiben ist (Im Ersatzschaltbild Abb. 4 verzichten wir darauf, die Zuleitungs-EMK $\mathcal{E}/2$ jeweils noch weiter auf linkes und rechtes Meßkabel aufzuteilen.). Die äußeren Maschen, welche die weißen Gebiete umschließen, sind hingegen flußfrei, so daß sich dort folgerichtig die Teil-EMK kompensieren (man beachte die Polung der Generatoren in Abb. 4).

Einige Autoren verstehen unter dem Begriff Voltmeter das gesamte Meßsystem zwischen den Meßspitzen bei a und b . Dies ist zwar formal möglich, führt aber zu Komplikationen: auf Grund der lageabhängigen Anzeige darf dann der Begriff der Meßspannung nicht verwendet werden. Stattdessen wird davon gesprochen, daß das Voltmeter das „Linienintegral des elektrischen Feldes durch sein Inneres“ messe [5]. Solche abstrakten und komplizierten

Umschreibungen erschweren jedoch eher das Verständnis und lenken von den wichtigen physikalischen Vorgängen ab. Wir unterscheiden hier klar zwischen dem eigentlichen Meßgerät und den Zuleitungen. Dies erlaubt es uns, den einfachen und Schülern wie Studenten bekannten Begriff der Meßspannung zu verwenden, wobei immer die Potentialdifferenz zwischen den Voltmetereingängen c und d gemeint ist. Aus Abb. 4 geht nun auch hervor, wie sich diese zusammensetzt: es ist die Summe aller induzierten EMK und Spannungsabfälle entlang eines Weges von c nach d . Da sich die Meßschleifen der beiden Voltmeter unterscheiden, ist es auch nicht verwunderlich, daß verschiedene Spannungen erfaßt werden. Für das erste Voltmeter ergibt sich beim Weg von c nach d über R_1 somit $U_{\text{mess},1} = \mathcal{E}/2 - \mathcal{E}/2 + R_1 I = R_1 I$ bzw. beim Weg über R_2 ebenfalls $U_{\text{mess},1} = \mathcal{E}/2 - R_2 I + \mathcal{E}/2 = \mathcal{E} - R_2 I = R_1 I$. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir auf dem Weg von c nach d die innere Kreisschleife beliebig oft durchlaufen: volle Umläufe liefern keinen Beitrag, $\mathcal{E} - I(R_1 + R_2) = 0$, da die Ladungen die dem Feld entzogene Energie vollständig in Joulesche Wärme umsetzen (siehe Gl. 2).

Beim betrachteten „elektrodynamischen Paradoxon“ erfaßt man also lediglich den durch den induzierten Kreisstrom verursachten Spannungsabfall $I R_1$ bzw. $-I R_2$ (siehe Gl. 3 und 4), da sich, wie in Abb. 4 gezeigt, in den Meßschleifen alle induzierten EMK aufheben. Letzteres läßt sich auch leicht demonstrieren bzw. führt bei Vorführungen zu einem überraschenden Effekt: man kann die Kontaktpunkte a und b der Meßkabel entlang des Kreisrings verschieben, ohne daß sich die Meßspannung ändert (s. u., Abb. 8). Zwischen den Punkten a und b existiert zwar eine eindeutige Potentialdifferenz, diese wird aber entgegen der ersten Erwartung des Betrachters nicht gemessen. Abb. 4 entnimmt man $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = -\mathcal{E}/2 + R_1 I = -R_2 I + \mathcal{E}/2$, woraus sich mit Gl. 2 sofort $U_{ba} = (R_1 - R_2)/(R_1 + R_2) \cdot \mathcal{E}/2$ ergibt (siehe auch [2,4]). Messen läßt sich dies aber nur mit Anordnungen, in denen die Zuleitungen frei von elektromotorischen Kräften sind [4]. Experimente dazu werden wir weiter unten noch vorstellen.

3.2 Konsequenzen

Das Paradoxon kann also nur aufgelöst, d. h. erklärt werden, wenn klar ist, wie induzierte EMK und Spannungsabfälle entlang der Leitungen verteilt sind und wie sie zur gemessenen Spannung beitragen. Natürlich kann man den Sachverhalt formal durch eine mathematische Herleitung oder mittels eines Ersatzschaltbildes darlegen. Wir wollen im folgenden aber zeigen, wie man mit ergänzenden Experimenten und einfachen Ersatzschaltbildern schritt-

weise die zugrundeliegende Physik verdeutlichen kann. Diese sollen insbesondere demonstrieren,

- wie sich die induzierte EMK entlang der Leitungen verteilt und
- wie sich die obige Messung der Spannungsabfälle $I R_1$ bzw. $-I R_2$ von einer Spannungsmessung zwischen den Punkten a und b unterscheidet.

4. Wie verteilt sich die EMK in inhomogenen und homogenen Leitern?

Das Faradaysche Induktionsgesetz (Gl.1) wird meist bei der Behandlung von Generatoren mittels einer homogenen Leiterschleife demonstriert. Bei dem oben besprochenen „elektrodynamischen Paradoxon“ wird hingegen eine inhomogene Leiterschleife verwendet, deren Widerstand im wesentlichen durch die beiden Elemente R_1 und R_2 gegeben ist. Da bei der Serienschaltung mit großen Widerständen i. a. große Spannungsabfälle assoziiert werden, führt dies u. U. zu einer Unsicherheit darüber, ob sich die Inhomogenität auf die Verteilung der EMK entlang des Leiters auswirkt. Zur experimentellen Klärung dieser Frage betrachten wir den in Abb. 5 skizzierten Aufbau, bei dem sich ein Leiterring zentrisch über dem Kern einer Spule befindet. Hierbei kann wahlweise eine homogene oder eine inhomogene Kreisschleife verwendet werden, wobei wir uns zunächst auf den inhomogenen Fall, d. h. auf die Schleife mit den beiden eingelöteten Widerständen konzentrieren wollen (Abb. 5a). Die Zuleitungen des Voltmeters sind ähnlich wie die Zeiger einer Uhr ausgeführt, so daß die Kontaktpunkte a und b verschiebbar sind. Ändert man den Winkel α zwischen ihnen und damit die Länge der abgegriffenen Teilbögen, so beobachtet man eine kontinuierliche Variation der Meßspannung (siehe Abb. 6). Da dabei der Span-

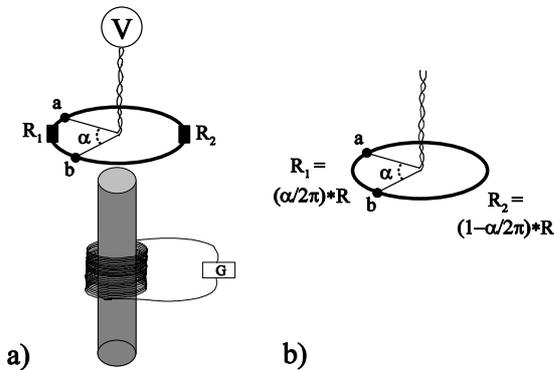


Abb. 5: Meßuhr mit verstellbaren Zeigern über einer Spule mit Kern, die ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt: a) inhomogener Ring b) homogener Ring mit Gesamtwiderstand R , dessen Teilwiderstände R_1 und R_2 proportional zur abgegriffenen Bogenlänge sind.

nungsabfall an den ohmschen Widerständen, $U_1 = R_1 I$ bzw. $U_2 = -R_2 I$ gleich bleibt, zeigt dies deutlich, daß die induzierte EMK homogen entlang des Kreisbogens verteilt ist. Das wollen wir durch eine kurze theoretische Betrachtung ergänzen:

Die zeitlich veränderliche, magnetische Flußdichte erzeugt ein elektrisches Feld, $-\partial \vec{B} / \partial t = \text{rot } \vec{E}$, welches auf den Widerstandsring einwirkt. Auf Grund der axialen Symmetrie des Aufbaus bilden die elektrischen Feldlinien konzentrische Kreise, so daß \vec{E} tangential zur Leiterschleife verläuft und entlang dieser betragsmäßig konstant ist. Letzteres gilt natürlich nur für das einwirkende Feld, nicht aber für das sich auf Grund der Ladungsverschiebungen dann einstellende Gesamtfeld: der lokale Spannungsabfall ist in inhomogenen Leitern ungleichförmig verteilt. Aus der Konstanz des tangential einwirkenden Feldes ergibt sich für die induzierte EMK $\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{s} = E \cdot 2\pi r$, wobei r der Radius des Ringes ist. Damit entfällt, wie im Ersatzschaltbild Abb. 7 gezeigt, auf das R_1 enthaltende Bogenstück zwischen a und b ein Anteil

$$\mathcal{E}_{b \rightarrow R_1 \rightarrow a} = \int_b^a \vec{E} d\vec{s} = E \cdot s = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \mathcal{E} \quad (6)$$

Da dieser proportional zur jeweils gewählten Bogenlänge s bzw. zu dem von den beiden Meßkabeln eingeschlossenen Winkel $\alpha = |s| / r$ ist, ist die EMK also homogen entlang der Kreisschleife verteilt. In den Meßkabeln von c nach a bzw. d nach b werden keine EMK induziert, da diese Leiterstücke senkrecht zu den elektrischen Feldlinien geführt sind, $\vec{E} \perp d\vec{s}$. Aus diesem Grund mißt das Voltmeter tatsächlich direkt die Potentialdifferenz $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a$ zwischen den Punkten b und a . Nach

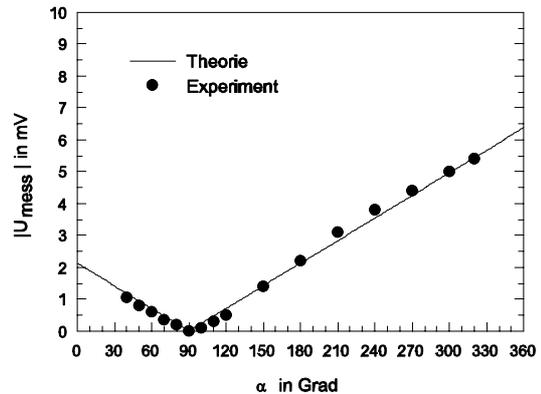


Abb. 6: Vergleich von gemessenen Effektivspannungen und Theorie (Gl. 8) für die in Abb. 5a) gezeigte Meßuhr mit $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$. Die Meßspannung verschwindet bei einem Winkel $\alpha_0 = 360^\circ \cdot R_1 / (R_1 + R_2) = 90^\circ$.

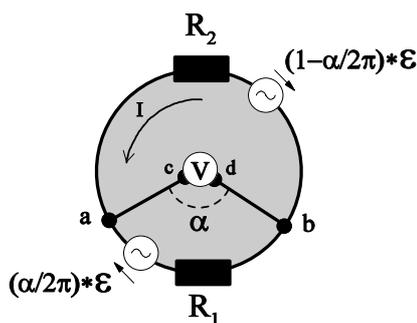


Abb. 7: Ersatzschaltbild der Spannungsuhr aus Abb. 5.

der verallgemeinerten Form des Ohmschen Gesetzes ist der Strom proportional zur Summe aus Potentialdifferenz und induzierter EMK [2,4]: $IR_1 = \mathcal{E}_{b \rightarrow R_1 \rightarrow a} + U_{ba}$. Damit ergibt sich die Meßspannung $U_{mess} = U_{ba}$ zu

$$\begin{aligned} U_{mess} &= +R_1 I - \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \mathcal{E} \\ &= -R_2 I + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \cdot \mathcal{E} \end{aligned} \quad , \quad (7)$$

was man auch sofort dem Ersatzschaltbild in Abb. 7 entnimmt (Durchlaufrichtung von a nach b über R_1 bzw. R_2). Einsetzen von $\mathcal{E} = (R_1 + R_2) \cdot I$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} U_{mess}(\alpha) &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \cdot \mathcal{E} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{(2\pi - \alpha) \cdot R_1 - \alpha \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \mathcal{E} \end{aligned} \quad . \quad (8)$$

Bei gegebenen Widerständen variiert die Meßspannung als Funktion des Winkels α also linear zwischen den Werten $\mathcal{E} \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$ und $-\mathcal{E} \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$, wobei der Vorzeichenwechsel einer Phasenverschiebung von 180° zwischen U_{mess} und \mathcal{E} entspricht. Da einfache Voltmeter nur den Betrag der Effektivspannung anzeigen, haben wir diesen in Abbildung 6 aufgetragen. Messung und Theorie stimmen gut überein, d. h. die axiale Symmetrie der Felder war trotz Verwendung eines Spulenkerns mit quadratischem Querschnitt hinreichend gewährleistet, zumindest im Bereich des Widerstandsrings (vgl. Abb. 5a). Die Meßspannung muß gemäß Gl. 8 bei einem Winkel von $\alpha_0 = 2\pi \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$ verschwinden, was bei den gewählten Widerständen $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ genau den gemessenen 90° entspricht (Abb. 6).

Obwohl dort die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b Null ist, fließt natürlich weiterhin der Strom I , was man gegebenenfalls durch Einbau eines geeigneten Detektors demonstrieren kann. In diesem Fall heben sich die zwischen a und b induzierte EMK und der Spannungsabfall am Widerstand gerade auf (siehe Gl. 7). Damit könnte man den Aufbau prinzipiell auch als Meßbrücke zur Bestimmung eines unbekanntes Widerstandes R_2 nutzen. Dazu muß man nur die Zeiger solange verstellen, bis bei einem Winkel α_0 die Brücke abgeglichen ist und $U_{mess}(\alpha_0) = 0$ gilt. Gemäß Gl. 8 berechnet man den unbekanntes Widerstand dann als

$$R_2 = R_1 \cdot \left(\frac{2\pi}{\alpha_0} - 1 \right) \quad . \quad (9)$$

Als weitere Versuchsvariante kann man bei der Vorführung auch den Winkel α festhalten und den Widerstand R_2 ändern. Beispielsweise liefert Gl. 8 für den symmetrischen Fall $\alpha = \pi$

$$U_{mess}(\alpha = \pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \mathcal{E} \quad , \quad (10)$$

so daß die Meßspannung genau für $R_2 = R_1$ verschwindet.

Zur Untermauerung sollte das Experiment, wie in Abb. 5b gezeigt, mit einem homogenen Kreisring wiederholt werden, wobei sich für alle Winkel α immer die Meßspannung 0 ergibt (siehe auch Ref. [6] bzw. Aufgabe 84 in Ref. [7]). Alle Punkte des Kreisringes befinden sich also auf dem gleichen Potential, d. h. in jedem Teilstück des Ringes heben sich induzierte Teil-EMK und strombedingter Spannungsabfall gerade auf (siehe Gl. 7): der Widerstand des homogenen Leiters ist proportional zu seiner Bogenlänge s , so daß $R_1 / (R_1 + R_2) = s / (2\pi r) = \alpha / (2\pi)$ gilt (siehe Abb. 6b). Gemäß Gl. 8 verschwindet dann die Meßspannung unabhängig von der Zeigerstellung.

Die obigen Experimente demonstrieren also, daß die induzierte EMK \mathcal{E} homogen entlang des kreisförmigen Leiters verteilt ist. In einem Bogenstück der Länge s wird also insgesamt nur der Anteil $(\alpha / 2\pi) \cdot \mathcal{E}$ induziert (siehe Abb. 7). Dies ist unabhängig davon, ob das Leiterstück homogen ist oder nicht. Für die symmetrische Zeigerstellung $\alpha = \pi$ wird im oberen und unteren Bogen genau die Hälfte der EMK, also $\mathcal{E} / 2$ induziert, was der Situation bei unserem „elektrodynamischen Paradoxon“ entspricht (Abb. 2 und 4). Nach den obigen Ausführungen ist auch sofort klar, weshalb man bei dem dort gezeigten Grundversuch die Kontaktpunkte der Meßkabel entlang der Leiterstücke zwischen den

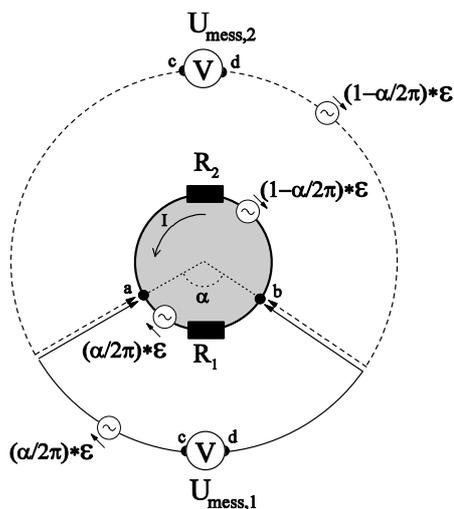


Abb. 8: Ersatzschaltbild des „elektrodynamischen Paradoxons“ bei unsymmetrischer Lage der Kontaktpunkte (vergleiche mit Abb. 4).

eingelöteten Widerständen R_1 und R_2 verschieben kann, ohne daß sich die Meßspannung ändert. Wie aus Abb. 8 hervorgeht, heben sich in den Meßkreisen weiterhin die induzierten EMK auf, so daß unabhängig von der Lage der Meßkabel nur der Spannungsabfall am jeweiligen Widerstand erfaßt wird (Gl. 3 und Gl. 4). Lediglich bei Verwendung eines homogenen Ringes variiert die Anzeige, da dort die jeweiligen Widerstandswerte proportional zur abgegriffenen Bogenlänge sind (siehe auch Ref. [6]). Gl. 3 und 4 liefern dann $U_{mess,1} = (\alpha/2\pi) \cdot \mathcal{E}$ bzw. $U_{mess,2} = (1 - \alpha/2\pi) \cdot \mathcal{E}$.

5. Zum Nachweis der Induktion in Meßleitungen

Um zu zeigen, daß bei dem in Kap. 1-3 besprochenen „elektrodynamischen Paradoxon“ auch die Zuleitungen der Voltmeter nicht frei von elektromotorischen Kräften sind, kann man das Grundexperiment leicht erweitern. Zunächst führt man die R_1 - und R_2 -seitigen Messungen, wie in Abb. 2 gezeigt, nacheinander oder gleichzeitig vor und hält das experimentelle Ergebnis gemäß Gl. 3-5 fest. Als nächstes zeigt man dann, daß es einen Übergang zwischen beiden Situationen gibt. Dazu wurde beispielsweise in Ref. [10] ein Handversuch mit einem dritten, beweglichen Voltmeter angeregt. Der unvermeidliche und je nach Kabellage unterschiedliche Streufluß in den Meßschleifen erlaubt jedoch keine reproduzierbaren Messungen, so daß solche Handversuche nur qualitative Hinweise geben. Wir haben nun einen Aufbau mit nur einem Voltmeter entworfen, der eine quantitative Untersuchung ermöglicht (siehe Abb. 9). Dabei befindet sich wieder eine Leiterschleife zentrisch über dem Kern einer Spule. Die Kontaktpunkte a und b teilen den Kreisring in zwei

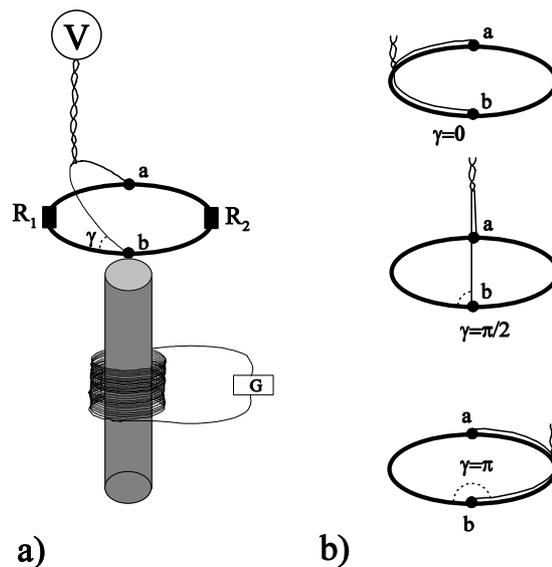


Abb. 9: a) Versuchsaufbau zum „elektrodynamischen Paradoxon“ mit beweglichem Klappbügel und inhomogenem Ring. Die Skala zur Ablesung des Winkels γ ist nicht eingezeichnet. b) Homogener Ring ($R_1 = R_2 = R/2$) mit verschiedenen Bügelpositionen.

Bögen gleicher Länge. Die Meßleitungen werden nun aber über einen halbkreisförmigen beweglichen Bügel geführt, der um die Achse $a-b$ drehbar ist. Dies erlaubt einen reproduzierbaren Übergang von der R_1 -seitigen Meßposition (Winkel $\gamma = 0$) in die R_2 -seitige Stellung ($\gamma = \pi$). Dabei ändert sich, wie in Abb. 10 gezeigt, die gemessene Spannung kontinuierlich von dem Anfangswert $U_{mess,1}$ über 0 auf den Endwert $U_{mess,2}$. Der Versuch zeigt deutlich, daß das Voltmeter nicht einfach eine wegunabhängige Potentialdifferenz zwischen den Kontaktpunkten a und b anzeigt. Da nur die Zuleitungen bewegt werden, muß die Änderung der Meßspannung allein auf Induktionsvorgänge in diesem Bereich zurückzuführen sein.

Gl 3 und 4 beschreiben nur die beiden Grenzfälle $\gamma = 0$ bzw. $\gamma = \pi$, bei der sich Bügel und Kreisring in einer Ebene befinden. Die zentrale Position $\gamma = \pi/2$, in der sich das Voltmeter genau über dem Kreisring befindet, entspricht der in Abb. 5 skizzierten Situation (für $\alpha = \pi$), in der die Zuleitungen zum Voltmeter senkrecht zu den elektrischen Feldlinien geführt und somit frei von induzierten EMK sind. In diesem Fall mißt das Voltmeter eine Spannung gemäß Gl. 10. Im folgenden wollen wir die in Abb. 10 gezeigte Winkelabhängigkeit der Meßspannung kurz erklären.

In den unbeweglichen Halbkreisbögen wird, wie oben gezeigt, jeweils ein Anteil $\pm \mathcal{E}/2$ der EMK

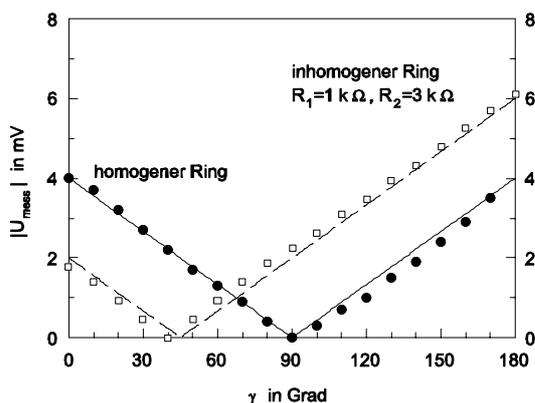


Abb. 10: Gemessene Effektivspannung als Funktion des Winkels γ für einen inhomogenen und einen homogenen Ring (siehe Abb. 9). Die Linien entsprechen jeweils Gl. 13 mit $\mathcal{E} = 8 \text{ mV}$ und $f(\gamma) = (1 - 2\gamma/\pi)$.

induziert (das Vorzeichen berücksichtigt die jeweilige Polung bezüglich der Punkte a und b , siehe das Ersatzschaltbild in Abb. 11). In dem beweglichen Zuleitungsbogen hingegen wird eine winkelabhängige EMK $\mathcal{E}/2 \cdot f(\gamma)$ induziert. Die Funktion $f(\gamma)$ hängt von der genauen Feldverteilung ab: man beachte, daß der Zuleitungsbügel sich, wie in Abb. 9a) gezeigt, über dem Ende des Spulenkerns befindet, also in einem Bereich, in dem das Magnetfeld zwar noch axiale Symmetrie⁴ aufweist, aber nicht homogen ist. Es gilt aber

$$f(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma = 0 \\ 0 & \text{für } \gamma = \pi/2 \\ -1 & \text{für } \gamma = \pi \end{cases}, \quad (11)$$

wie man leicht einsieht: für $\gamma = 0$ oder π liegt der Bügel über den festen Halbkreisbögen und trägt somit auch die gleiche EMK, nämlich $\pm \mathcal{E}/2$. Bei $\gamma = \pi/2$ wird nichts induziert, da kein magnetischer Fluß die Bügelfläche durchsetzt (anders ausgedrückt: die Zuleitungen verlaufen senkrecht zu den elektrischen Feldlinien). Da die Induktionswirkung für $\gamma = 0$ bzw. π am größten ist, gilt $|f(\gamma)| \leq 1$. Darüber hinaus macht man sich auch leicht klar, daß der Winkel $\gamma = \pi/2$ einen Symmetriepunkt darstellt, so daß die Funktion f punktsymmetrisch ist: $f(\gamma) = -f(\pi - \gamma)$. Gemäß Abb. 11 wird in der Meßschleife vom Eingang c des Voltmeters über a ,

⁴Eine Spiegelsymmetrie bezüglich der durch die Achse $a-b$ und den Spulenzentrum verlaufenden Ebene ist für die folgende Betrachtung bereits ausreichend, so daß auch ein Kern mit quadratischem Querschnitt verwendet werden kann.

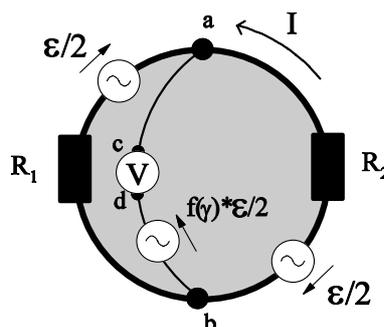


Abb. 11: Ersatzschaltbild für die in Abb. 9a) gezeigte Meßanordnung.

R_2 und b zurück zum Eingang d insgesamt die EMK $[f(\gamma) + 1] \cdot \mathcal{E}/2$ induziert. Das Voltmeter mißt also

$$\begin{aligned} U_{\text{mess}} &= \frac{1}{2} \cdot [f(\gamma) + 1] \cdot \mathcal{E} - R_2 \cdot I \\ &= \frac{1}{2} \cdot [f(\gamma) - 1] \cdot \mathcal{E} + R_1 \cdot I \end{aligned} \quad (12)$$

(siehe in Abb. 11 den Weg von c nach d über R_2 bzw. R_1). Daraus folgt mit Gl. 2

$$U_{\text{mess}} = \frac{1}{2} \cdot \left(f(\gamma) + \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \mathcal{E} \quad (13)$$

Für $\gamma = 0, \pi$ und $\pi/2$ ergeben sich daraus mit Gl. 11 die bekannten Gl. 3, 4 und 10. Variiert man γ zwischen 0 und π , so ändert sich die Meßspannung kontinuierlich von $R_1/(R_1 + R_2) \cdot \mathcal{E}$ auf $-R_2/(R_1 + R_2) \cdot \mathcal{E}$. Für den homogenen Ring vereinfacht sich Gl. 13 mit $R_1 = R_2$ zu

$$U_{\text{mess}} = \frac{1}{2} \cdot f(\gamma) \cdot \mathcal{E} \quad (14)$$

Die gemessenen Effektivwerte in Abb. 10 zeigen eine lineare Variation als Funktion des Winkels. Sie lassen sich im Rahmen der Meßgenauigkeit mittels Gl. 13 beschreiben, wobei für unseren Aufbau in guter Näherung $f(\gamma) \approx (1 - 2\gamma/\pi)$. Die Werte für den homogenen Ring, $U_{\text{mess}} \propto f(\gamma)$, zeigen direkt die geforderte Symmetrie von f um $\pi/2$. Die Meßspannung verschwindet für den Winkel γ_0 , an dem $f(\gamma_0) = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$ gilt. Beim homogenen Ring ist dies für $\gamma_0 = \pi/2$ der Fall, beim inhomogenen Ring mit $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ für $f(\gamma_0) = 0.5$, was hier $\gamma_0 \approx 45^\circ$ entspricht.

6. Fazit

Wir haben Experimente vorgestellt, welche ein besseres Verständnis induzierter elektromotorischer Kräfte erlauben. Insbesondere verdeutlichen sie, wie sich die EMK entlang von Leitungen verteilt und was Voltmeter messen. Die Versuche eignen sich sowohl zur Demonstration in Vorlesungen als auch zum Einsatz in Praktika. Die Anordnungen sind so einfach gehalten, daß sie auch mit Schulmitteln aufzubauen sind. Auf eine weniger detaillierte, schulgerechte Darstellung der Thematik im Oberstufenunterricht gehen wir in einem anderen Artikel ein [11].

Wir danken Dr. W. Klein und Dr. R. Berger, die uns auf den Grundversuch des obigen „elektrodynamischen Paradoxons“ aufmerksam gemacht und so die Anregung zu dieser Arbeit gegeben haben.

- [1] MOORCROFT, D. R.: Faraday's Law - Demonstration of a Teaser. In: *Am. J. Phys.* **37** (1969) S. 221
- [2] MOORCROFT, D. R.: Faraday's Law, Potential and Voltage - Discussion of a Teaser. In: *Am. J. Phys.* **38** (1970) S. 376-377
- [3] KLEIN, Werner: Experimental “paradox” in electrodynamics. In: *Am. J. Phys.* **49** (1981) S. 603-604
- [4] REIF, F.: Generalized Ohm's law, potential difference, and voltage measurements. In: *Am. J. Phys.* **50** (1982) S. 1048-1049
- [5] ROMER, Robert H.: What do “voltmeters” measure?: Faraday's law in a multiply connected region. In: *Am. J. Phys.* **50** (1982) S. 1089-1093
- [6] PHILLIPS, Melba: Electromotive Force and The Law of Induction. In: *The Physics Teacher* **1** no. 4 (1963) S. 155-158
- [7] siehe Aufgaben 77 und 84 aus: LANGE, W. N.: *Physikalische Paradoxa und interessante Aufgaben: Verwunderliches aus der Physik III*, 3. Auflage, Thun, Frankfurt am Main: Deutsch, 1987.
- [8] KHANNA, S. M.; LEBLANC, M. A. R.: Flux-flow voltages and Faraday induction during guided entry or exit of flux in hollow superconducting cylinders. In: *IEEE Trans. Magn.* **MAG-11** (1975) S. 354-357
- [9] KHANNA, S. M.; CLEM, John R.; LEBLANC, M. A. R.: Flux-flow voltages during guided flux collapse from hollow superconducting cylinders. In: *Phys. Rev. B* **14** (1976) S. 3898-3913.
- [10] GUPTA, P. D.: Letter to the editor. In: *Am. J. Phys.* **51** (1983) S. 1067
- [11] HÜTTL, I.; PELSTER, R.: Wie “eigensinnig” können Voltmeter sein?. In: MNU (2004) im Druck