

## Induktion trotz magnetischer Abschirmung? Auflösung eines scheinbaren Paradoxons

**Rolf Pelster, Fabian Schön, Thomas Klein, Tobias Weber und Nina Siebenpfeiffer**

Experimentalphysik und Didaktik der Physik, Universität des Saarlandes,  
Campus E2 6, 66123 Saarbrücken

[rolf.pelster@mx.uni-saarland.de](mailto:rolf.pelster@mx.uni-saarland.de), [f.schoen@schule.saarland](mailto:f.schoen@schule.saarland), [th.klein@schule.saarland](mailto:th.klein@schule.saarland)

(Eingegangen: 10.07.2023; Angenommen: 10.06.2024)

### Kurzfassung

Um gibt man einen stromdurchflossenen Leiter mit einer magnetischen Abschirmung, so wirkt auf ihn in einem äußeren Magnetfeld keine Lorentzkraft mehr. Dies liegt daran, dass die magnetische Flussdichte am Ort der bewegten Ladungen null ist. Erstaunlicherweise wird dennoch bei der Bewegung eines abgeschirmten Leiters in einem äußeren Magnetfeld eine Spannung induziert. Zur Auflösung dieses Paradoxons zeigen wir in einer Reihe von Experimenten, dass sich bei der Bewegung mehrerer felderzeugender Objekte deren Felder aufheben können, ohne dass die resultierende Lorentzkraft verschwindet. Die Versuche verdeutlichen damit zum einen, dass es keine Induktionsspannung ohne lokale Wirkung einer elektromagnetischen Kraft gibt. Zum anderen erlauben sie es, das für die Lorentzkraft so wichtige Konzept der Relativbewegung zu vertiefen.

### Abstract

The Lorentz force on a current-carrying conductor in an external magnetic field vanishes when the conductor is surrounded by a magnetic shield. The latter suppresses the magnetic flux density acting on the mobile charges. Surprisingly, such a shielding has no impact on electromagnetic induction in a circuit of changing shape or orientation. In order to resolve this paradox we present a series of experiments demonstrating that the fields of different magnetic elements can cancel each other while this is not necessarily the case for the Lorentz forces. On the one hand, the experiments show that there is no induction without a local action of an electromagnetic force. On the other hand, they reinforce the concept of relative movement that is essential for understanding the Lorentz force.

### 1. Einleitung

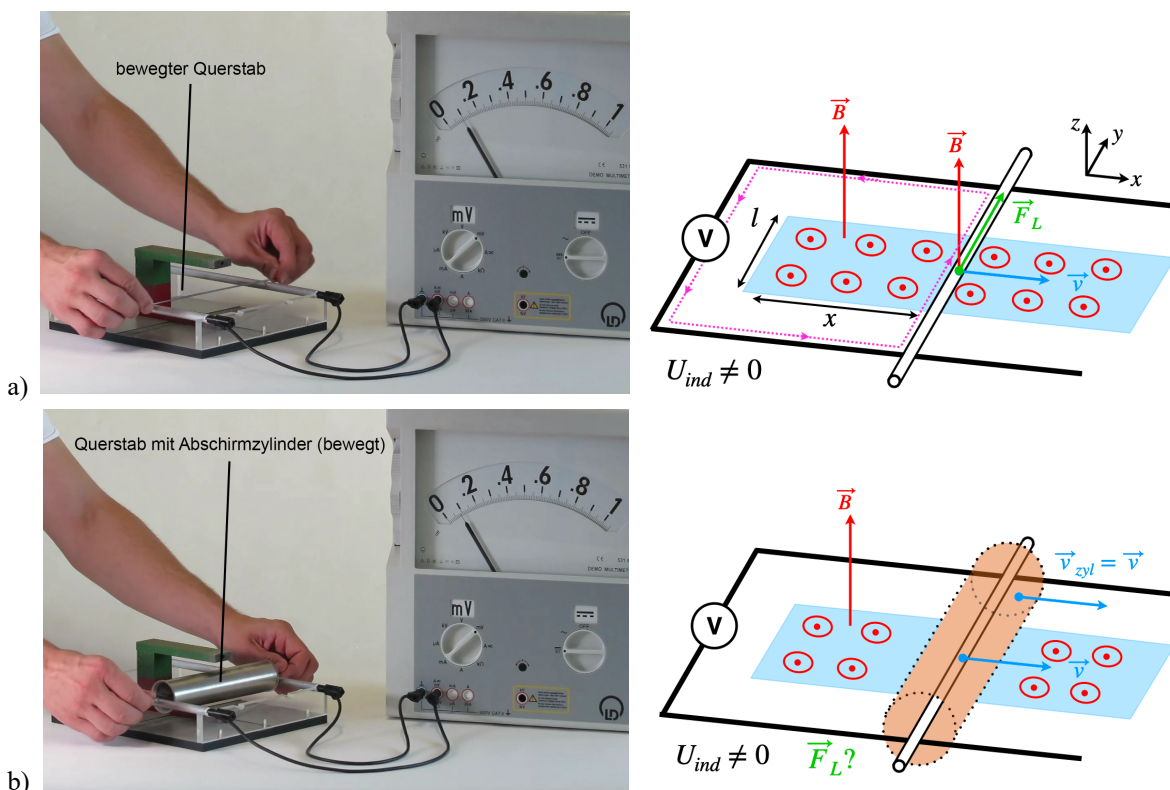
Als elektromagnetische Induktion bezeichnet man eine Vielzahl physikalischer Phänomene, bei denen Ladungsverschiebungen in Leiterschleifen auftreten, wenn deren Inneres von zeitlich veränderlichen Magnetfeldern durchsetzt wird oder wenn sich Teilstücke der Leiterschleife quer zu einem Magnetfeld bewegen (sogenannte Bewegungsinduktion). Obwohl die Induktion standardmäßig im Physikunterricht [1-9] und im Physikstudium [10-17] behandelt wird, gibt es einfachste experimentelle Anordnungen, die uns vor grundlegende Verständnisprobleme stellen. Ein Beispiel ist ein scheinbares Paradoxon, auf das vereinzelt in der Literatur hingewiesen wird, ohne jedoch aufgelöst zu werden: Bewegungsinduktion tritt auch dann auf, wenn man die Leiterschleife magnetisch abschirmt, so dass das lokale Magnetfeld am Ort des bewegten Leiterstücks verschwindet [18, 19].

Um dies zu erläutern, zeigen wir in Abb. 1a zunächst ein bekanntes Demonstrationsexperiment: Im Feld eines U-Magneten bewegen wir einen metallischen

Querstab, der Teil eines Messkreises mit eingefügtem Voltmeter ist. Dabei messen wir eine induzierte Spannung in der Größenordnung von einem Zehntel mV (siehe Abb. 1a und Video 1). Die Skizze zeigt die von der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  durchsetzte Schleifenfläche für den idealisierten Fall eines räumlich scharf begrenzten Feldes. Eingezeichnet ist auch die Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \{1\}$$

Diese wirkt auf die beweglichen Leitungselektronen (Ladung  $q = -e$ ) des aufgelegten Metallstabs, da sich die Elektronen zusammen mit dem Stab mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im Feld des Permanentmagneten bewegen. Die Elektronen werden in Richtung der Kraft verschoben, so dass sich die Zuleitungsschienen entgegengesetzt aufladen und das Voltmeter eine Spannung anzeigt. In diesem Gleichgewichtszustand kompensieren sich Lorentzkraft und entgegengerichtete Coulombkraft.



**Abb. 1:** Demonstration der Bewegungsinduktion mit und ohne magnetische Abschirmung (siehe auch das Video 1). **a)** Klassischer Versuch. Zu sehen ist ein Permanentmagnet, ein Voltmeter, das mit zwei horizontal gelagerten Metallstangen verbunden ist (Aluminium, Achsenabstand 18,5 cm, Durchmesser 1 cm) sowie ein aufgelegter metallischer Querstab (Aluminium, Durchmesser 2 mm). Bei einer hinreichend schnellen Bewegung des Querstabs werden Spannungen in der Größenordnung von einem Zehntel mV gemessen. Die Skizze des Versuchsaufbaus zeigt, dass sich die vom Feld durchsetzte Schleifenfläche und damit der magnetische Fluss in der Messschleife ändert. Eingezeichnet ist auch die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ , unter deren Einfluss sich die Leitungselektronen verschieben. Dadurch wird die hintere Kontaktschiene negativ und die vordere positiv geladen (nicht eingezeichnet), bis die Coulombkraft die Lorentzkraft kompensiert. Die violett gestrichelte Linie deutet den Integrationsweg des Integrals aus Gl. {5} an. **b)** Der gleiche Versuch mit abgeschirmtem Querstab. Der Abschirmzylinder aus Mu-Metall ist an seinen Enden mit Plexiglasverschlüssen versehen, in deren zentralen Bohrungen der Querstab gelagert ist, so dass sich dieser immer auf der Zylinderachse befindet. Bei der Bewegung des Querstabes mit dem ihn umgebenden Abschirmzylinder wird überraschenderweise wieder eine Spannung in der Größenordnung von 0,1 mV induziert. Die Skizze zeigt, dass sich der von der Leiterschleife umschlossene magnetische Fluss weiterhin ändert. Unklar bleibt zunächst, weshalb sich Ladungen verschieben, obwohl die magnetische Flussdichte im Inneren des Abschirmzylinders verschwindend klein ist.

Wie in Abb. 1b und im Video 1 gezeigt, messen wir aber auch dann eine Induktionsspannung in der Größenordnung von 0,1 mV, wenn wir den bewegten Querstab mit einem Zylinder aus Mu-Metall umgeben,<sup>1</sup> der dafür sorgt, dass der Querstab in seinem Inneren nur noch einer verschwindend kleinen magnetischen Flussdichte ausgesetzt ist [20]. Das lässt sich leicht mit einer Hallsonde überprüfen (s. u., Abschnitt 4.2). Der kognitive Konflikt liegt auf der Hand:

*Wieso tritt Induktion auch dann auf, wenn ein magnetisch abgeschirmtes Leiterstück transversal zu einem statischen Magnetfeld bewegt wird? Sollte die Lorentzkraft ohne ein  $\vec{B}$ -Feld am Ort der*

*Ladungsträger nicht verschwinden, so dass sich diese nicht verschieben?*

Das Verständnisproblem tritt allerdings nicht auf, wenn wir die Frage nach der wirkenden Kraft ignorieren und uns stattdessen lediglich auf das Induktionsgesetz fokussieren, das im Oberstufenunterricht und in Grundvorlesungen des Physikstudiums [1-17] in der Form

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \{2\}$$

eingeführt wird und in dieser Schreibweise oft auch den Namen Faraday-Gesetz trägt. Eine Induktionsspannung, auch elektromotorische Kraft oder

<sup>1</sup> Mu-Metall ist ein weichmagnetisches hochpermeables Material der SEKELS GmbH [20], die auch den Zylinder angefertigt hat.

Ringspannung genannt, tritt also auf, wenn sich der magnetische Fluss

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A} \quad \{3\}$$

zeitlich ändert.<sup>2</sup> Der magnetische Fluss ist das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$ , und  $d\vec{A}$  bezeichnet ein infinitesimales Flächenelement der von der Leiterschleife umschlossenen Fläche  $\vec{A}$ . Wie in den Skizzen der Abb. 1a und 1b gezeigt, ändert sich in beiden Fällen bei Bewegung des Querstabs die vom Magnetfeld durchsetzte Schleifenfläche und damit der magnetische Fluss. Das Auftreten einer Induktionsspannung ist auf Grundlage des Faraday'schen Gesetzes (Gl. {2}) also auch dann zu erwarten, wenn der bewegte Querstab magnetisch abgeschirmt wird.

Es wäre jedoch überaus schade, sich mit dem obigen Hinweis zufriedenzugeben. Die kompakte Formulierung des Faraday'schen Gesetzes erleichtert zwar in vielen Fällen die Vorhersage von Experimenten bzw. die einfache Berechnung von Induktionsspannungen oder -strömen. Dies garantiert aber noch kein physikalisches Verständnis der Induktionsvorgänge. Ziehen wir uns daher einfach auf den gerade passenden Teil eines Formalismus zurück und blenden den scheinbaren Konflikt mit der Lorentzkraft aus, könnte dies den falschen Schluss nahelegen, die Flussänderung sei für die Induktion grundlegender als die Kraftwirkung bzw. Letztere sei gar nicht nötig.

In der Literatur oder im Internet finden sich nur vereinzelt über Gl. {2} hinausgehende Erklärungsversuche des Experiments aus Abb.1, die aber fachlich irreführend sind. Hierzu gehört beispielsweise die Unterscheidung zwischen verschiedenen Induktionsmechanismen, die einzeln oder gemeinsam auftreten können (Kraftwirkung beim „Schneiden von Feldlinien“ oder „Transformatorwirkung“ bei Flussänderung [19]), oder auch die Spekulation über Induktion als nichtlokalen Effekt [21]. Wir werden im Folgenden den in der Literatur nur kurz als Gedankenexperiment diskutierten Versuch zur magnetisch abgeschirmten Bewegungsinduktion experimentell erweitern und im Detail analysieren. Insbesondere werden wir zeigen, dass man bei der Auflösung des Paradoxons viel über die Natur der Lorentzkraft und

insbesondere das Konzept der Relativbewegung lernen kann.

## 2. Induktion und elektromagnetische Kraft

### 2.1 Theoretischer Hintergrund

Alle Induktionsphänomene sind mit einer Kraftwirkung auf Ladungen verbunden. Ohne eine solche würden sich in einer Leiterschleife auch keine Ladungen verschieben, d. h. es könnten keine induzierten Ströme fließen bzw. ein Voltmeter könnte keine Spannung anzeigen. Diesen physikalischen Hintergrund des Faraday'schen Gesetzes wollen wir im Folgenden kurz erläutern. Gemäß Gl. {2} kann man den magnetischen Fluss auf zweierlei Art ändern [13, 14, 22]:

- a) durch zeitlich veränderliche Magnetfelder, die – auch wenn sie nur einen räumlich begrenzten Teilbereich im Inneren der Schleifenfläche  $\vec{A}$  durchsetzen – überall im Raum ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  hervorrufen,<sup>3</sup> also auch in der sie umschließenden Leiterschleife (siehe Abb. 12 im Anhang). Dabei wirkt auf die beweglichen Leitungselektronen die Kraft  $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$  und verschiebt diese.
- b) durch eine zeitliche Änderung der Leiterschleifenfläche, bei der sich Leitersegmente quer zu einem statischen Magnetfeld bewegen. Dabei verschieben sich die beweglichen Leitungselektronen auf Grund der Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ .

Aus Sicht der klassischen Physik sind die beiden obigen Wirkmechanismen unterschiedlich und werden rein empirisch durch das Faraday'sche Gesetz zusammengefasst, ohne dass sich dies herleiten ließe [13, 17].<sup>4</sup> Erklären konnte dies erst Albert Einstein. Er erkannte als gemeinsame Ursache aller Induktionsphänomene die elektromagnetische Kraft,

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}), \quad \{4\}$$

die unabhängig von dem für die Beschreibung gewählten Inertialsystem ist [9, 13, 14, 15, 22, 23, 24] und auch als (verallgemeinerte) Lorentzkraft bezeichnet wird. Die Felder hängen hingegen vom gewählten Bezugssystem ab.<sup>5</sup> Die Unterscheidung zwischen

<sup>2</sup> In der Klassenstufe 11 wird dies meistens in der Form  $U_{ind} = -n \cdot d\Phi/dt$  für eine Leiterschleife mit  $n$  Windungen angegeben, wobei der Fluss einer einzelnen Leiterschleifenwindung vereinfacht als  $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$  oder  $\Phi = A \cdot B \cdot \cos\varphi$  geschrieben wird ( $\varphi$  ist der Winkel zwischen der Flächennormalen und der magnetischen Flussdichte).

<sup>3</sup> Dies schlägt sich in der Maxwell-Gleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$  nieder.

<sup>4</sup> Darüber hinaus führt die Unterscheidung von elektrischen und magnetischen Kräften zu einem unerklärlichen Zufall, wenn man Relativbewegungen von Ladungen und Magneten betrachtet: Bewegt man eine Leiterschleife im inhomogenen Feld eines ruhenden Magneten, so sollte eine magnetische Kraft gemäß b) wirken, lässt man hingegen die Leiterschleife ruhen und bewegt den Magneten, wirkt eine elektrische Kraft gemäß a). Dennoch misst man in beiden Fällen die gleiche Induktionsspannung [10, 13].

<sup>5</sup> Beispielsweise herrscht in einem relativ zu einer Ladung ruhenden Bezugssystem nur ein elektrisches Feld, in einem relativ dazu bewegten System aber zusätzlich ein magnetisches Feld: Grund ist die dort beobachtete Ladungsbewegung, d. h. ein Stromfluss. Bei dem Versuch in Abb. 1a hingegen ist ein mit dem Querstab bewegtes Leitungselektron im Laborsystem der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  ausgesetzt, jedoch keinem elektrischen Feld ( $\vec{E} = \vec{0}$ ), so dass die Kraft  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  wirkt. In einem mit dem Elektron bewegten Bezugssystem – seinem Ruhesystem, in dem es die Geschwindigkeit  $\vec{v}' = \vec{0}$  hat – wirkt die gleiche Kraft, die jedoch in diesem Bezugssystem mit einem dort messbaren elektrischen Feld  $\vec{E}'$  verknüpft ist:  $\vec{F} = q \cdot (\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q \cdot \vec{E}'$ . Nach Einsteins Interpretation ist die Lorentzkraft ein relativistischer Effekt, der sich bereits bei Geschwindigkeiten  $|\vec{v}| \ll c$  bemerkbar macht [9, 13, 14,

elektrischen und magnetischen Kräften wird also in der speziellen Relativitätstheorie aufgehoben. In der Tat lässt sich dann die Induktionsspannung, auch elektromotorische Kraft oder Ringspannung genannt, immer als Integral über die lokal wirkende elektromagnetische Kraft  $\vec{F}$  pro Ladung entlang eines geschlossenen<sup>6</sup> Weges  $C$  schreiben [14]:

$$U_{ind} = \oint_C \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} d\vec{s} \quad \{5\}$$

Die Richtung des Magnetfeldes und der Umlaufsinn des Weges bilden eine Rechtsschraube (vgl. Abb. 1a). Die obige Gleichung liefert den Zusammenhang zwischen der elektromagnetischen Kraft (Gl. {4}) und der eine Induktion hervorrufenden Flussänderung gemäß Gl. {2}. Wir skizzieren die Herleitung des Induktionsgesetzes (Gl. {2}) aus Gl. {4} und {5} mit seiner allgemeingültigen Formulierung der Flussänderung im Anhang I (siehe Gl. {24} und [22]).

Das Faraday'sche Gesetz stellt also keinesfalls in Frage, dass bei Induktion durch eine einwirkende Kraft Ladungsträger verschoben werden. Seine Stärke und Nützlichkeit besteht vielmehr darin, dass man für die Berechnung der Induktionsspannung gar nicht unbedingt auf diese elektromagnetische Kraft zurückgreifen muss bzw. äquivalent dazu auf die lokalen Felder am Rande der von der Leiterschleife begrenzten Fläche (siehe Gl. {4} und {5}): Die Kenntnis der integralen Größe „magnetischer Fluss“ bzw. deren Änderung reicht bereits aus, was viele Probleme rechnerisch vereinfacht, zumindest solche, die im Oberstufenunterricht oder in universitären Anfängervorlesungen behandelt werden. Den eigentlichen Mechanismus, die Wirkung einer elektromagnetischen Kraft, darf man dabei aber nicht aus den Augen verlieren [22].

## 2.2 Bewegungsinduktion ohne magnetische Abschirmung: zwei Ansätze – ein Ergebnis

Betrachten wir nun das konkrete Beispiel aus Abb. 1a. Die Messschleife begrenzt die Fläche  $\vec{A}$  und im idealisierten Fall eines homogenen und räumlich scharf begrenzten Feldes gilt gemäß Gl. {2}:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = -B_z \cdot \ell \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= -v_x \cdot B_z \cdot \ell \end{aligned} \quad \{6a\}$$

Dabei bezeichnet  $\ell$  die Länge des Querstabs, die dem Magnetfeld ausgesetzt ist,  $B_z$  die vorzeichenbehaftete Vektorkomponente von  $\vec{B}$  in z-Richtung, und  $v_x$  die Vektorkomponente der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , mit der

der Stab in x-Richtung verschoben wird. Äquivalent dazu ist die Kraftbetrachtung nach Gl. {5}, wobei der Weg  $C$  – der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird – durch die skizzierte Messschleife vorgegeben ist. Da kein elektrisches Feld angelegt wird, gilt  $\vec{E} = \vec{0}$  und die allgemeine elektromagnetische Kraft aus Gl. {4} reduziert sich auf den Spezialfall von Gl. {1}. Die elektromagnetische Kraft ist hier nur im Bereich des Magnetfelds von null verschieden, also auf einer Länge  $\ell$  entlang des Querstabs. Damit folgt für die Kraft pro Ladung entlang des Weges<sup>7</sup> gemäß Gl. {5}:

$$U_{ind} = -\frac{F_{Ly}}{q} \cdot \ell = -v_x \cdot B_z \cdot \ell \quad \{6b\}$$

Die Übereinstimmung der Terme in Gl. {6a} und {6b} ist kein Zufall. Auch in inhomogenen Feldern bzw. bei beliebig geformten Leiterstücken wirkt auf die Ladungsträger jedes Leitersegments, das pro Zeit eine Fläche quer zum Feld überstreicht, immer auch die Lorentzkraft.<sup>8</sup> Für den Fall zeitlich konstanter Felder ( $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$ ) gilt dementsprechend [14]:

$$U_{ind} = \oint \frac{\vec{F}}{q} d\vec{s} = - \int \underbrace{\vec{B}}_{\substack{\text{überstrichene} \\ \text{Fläche pro Zeit}}} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \{7\}$$

[siehe Gl. 24 in Anhang I]. Der Kraftansatz und die Betrachtung der Flussänderung führen somit immer zum gleichen Ergebnis.<sup>9</sup> Auf diesen Zusammenhang werden wir in Abschnitt 4 noch zurückkommen.

## 2.3 Schlussfolgerung für die Bewegungsinduktion mit magnetischer Abschirmung

Wie oben ausgeführt ist Induktion ohne lokale Kraftwirkung nicht möglich. Wäre beim Experiment zur Bewegungsinduktion mit magnetischer Abschirmung (Abb. 1b) die Lorentzkraft null, so hätten wir keine Induktionsspannung messen können. Anders ausgedrückt: Da  $U_{ind} \neq 0$  gilt, kann die Lorentzkraft trotz magnetischer Abschirmung gar nicht verschwunden sein. Es liegt also auf der Hand, dass der Schlüssel zur Auflösung des Paradoxons in unserem Verständnis der Lorentzkraft liegen muss: Welche Bewegungen und Felder treten hier auf bzw. sind in Gl. {2} und {7} relevant? Erste nützliche Hinweise liefern die folgenden Experimente, die wir einer weiteren Analyse voranstellen.

15, 23, 24]. Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist die Flussdichte für  $|\vec{v}| \ll c$  in beiden Systemen gleich, d. h. es gilt  $\vec{B} = \vec{B}'$ .

<sup>6</sup> Die Induktionsspannung ist keine Potenzialdifferenz und in Gl. {5} wird über einen geschlossenen Weg integriert. In konservativen Feldern, wie sie von ruhenden Ladungen hervorgerufen werden, gilt  $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ .

<sup>7</sup> Das Minuszeichen ergibt sich daraus, dass entlang des Querstabes  $\vec{F}_L/q = \vec{v} \times \vec{B}$  antiparallel zum Wegelement  $d\vec{s}$  des

Integrationswegs ist.  $\vec{F}_L$  hingegen ist aufgrund der negativen Ladung  $q = -e$  parallel zu  $d\vec{s}$  (siehe Abb. 1a).

<sup>8</sup> Man betrachtet dann infinitesimale kleine Leitersegmente und die von diesen überstrichenen Flächen.

<sup>9</sup> In einfachen Leiterschleifen und damit in allen schulrelevanten Fällen entspricht die pro Zeit überstrichene Fläche der Änderung der Leiterschleifenfläche. Letztere ist aber nicht für alle Anordnungen eine wohldefinierte physikalische Größe (siehe die Hinweise in Anhang I und [22]).



### 3. Weitere Experimente zur Lorentzkraft mit und ohne Abschirmung

#### 3.1 Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld – ein Umkehrexperiment?

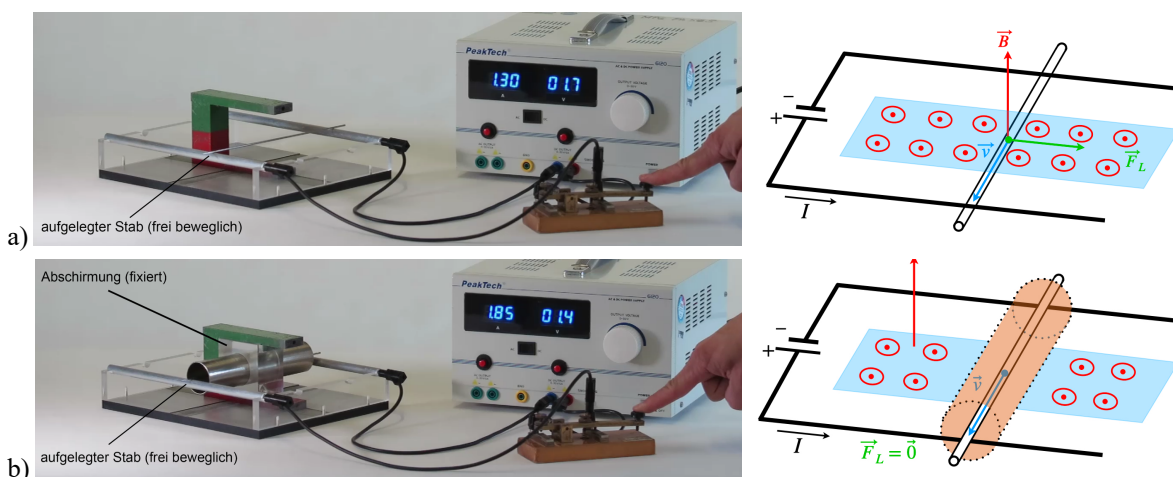
Das in Abb. 2a gezeigte Experiment wird standardmäßig zur Demonstration der Lorentzkraft vorgeführt und vereinzelt auch als Umkehrexperiment des Induktionsversuchs aus Abb. 1a bezeichnet. In der Tat ist der Aufbau ähnlich, allerdings wird der Querstab nun ruhend auf die Kontaktschienen gelegt – also nicht per Hand verschoben – und das Voltmeter durch eine Gleichstromquelle ersetzt.

Bereits eine Stromstärke von  $I \approx 0,3$  A reicht aus, um den Querstab in Bewegung zu setzen. Wir haben die Stromstärke auf Werte unter 2 A begrenzt, damit das vom Strom in den Zuleitungen erzeugte Feld gegenüber dem durch den U-Magneten erzeugten Feld vernachlässigbar klein bleibt (bei einer Stromstärke oberhalb von 10 A bewegt sich der Stab schon allein unter dem Einfluss des ersteren Feldes, d. h. auch wenn gar kein U-Magnet vorhanden ist). Die Bewegung des Querstabs (siehe Video 2) wird durch die Lorentzkraft, die auf eine Anzahl von  $N$  Leitungselektronen wirkt, hervorgerufen. Bei Stromfluss

bewegen sich diese Elektronen mit einer konstanten Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_{Drift}$ , deren Betrag in der Größenordnung von 0,05 mm/s liegt.<sup>10</sup> Auf den aufgelegten Querstab wirkt also gemäß Gl. {1} die  $N$ -fache Lorentzkraft vom Betrag:<sup>11</sup>

$$|\vec{F}_{Leiter}| = N \cdot |\vec{F}_L| = \ell \cdot I \cdot |\vec{B}| \quad \{8\}$$

Dabei bezeichnet  $\ell$  die Strecke, auf der das Leiterstück dem Feld  $|\vec{B}|$  ausgesetzt ist. Für den U-Magneten erhalten wir mit  $\vec{B} = 21,5$  mT und einer Schenkelbreite von  $\ell = 3$  cm bei einer Stromstärke  $I \approx 1,3$  A eine Kraft in der Größenordnung von  $|\vec{F}_{Leiter}| \approx 0,8$  mN. Aufgrund des Streufeldes des Magneten ist der Stab allerdings dem Feld auf einer größeren Länge ausgesetzt, auch wenn die magnetische Flussdichte mit zunehmender Entfernung rasch abnimmt. Die tatsächliche Kraft ist daher ca. doppelt so groß (siehe Anhang II). Während es bei dem Induktionsexperiment aus Abb. 1a die Bewegung des Stabes im Feld ist, die eine Kraft auf die Ladungsträger hervorruft, ist es hier umgekehrt: Die sich bewegenden Ladungen bewirken eine Kraft auf den Querstab.



**Abb. 2:** **a)** Experimentelle Umsetzung eines klassischen Versuches zur Demonstration der Lorentzkraft (Umkehrung des Versuches aus Abb. 1a). Zu sehen sind ein U-förmiger Permanentmagnet und eine Stromquelle, die an zwei horizontal gelagerte Metallstangen angeschlossen ist, die über einen aufgelegten Leiterstab (Durchmesser 2 mm) miteinander verbunden sind. Ab einer Stromstärke von ca.  $I \approx 0,3$  A fängt der Querstab unter dem Einfluss der Lorentzkraft an zu rollen, wenn der Stromkreis über einen Taster geschlossen wird. Für  $I \approx 1,3$  A wirkt auf den stromdurchflossenen Leiter eine Kraft in der Größenordnung von 1 – 2 mN (siehe Gl. {8} und Text). **b)** Modifikation des Versuches durch zusätzlichen Einsatz eines zwischen den Schenkeln des U-Magneten fixierten Abschirmzylinders, in dessen Mitte sich der aufgelegte Querstab befindet – im Gegensatz zum Aufbau in Abb. 1b ist er aber nicht auf der Zylinderachse fixiert. Der ruhende Querstab wird auch nicht in Bewegung gesetzt, wenn ein Strom der Stärke  $I \approx 1,85$  A fließt. Wie erwartet ist die Lorentzkraft also verschwindend klein. Siehe hierzu auch das Video 2.

<sup>10</sup> Die elektrische Feldstärke (Spannung pro Länge), dem die Leitungselektronen in einem Metalldraht ausgesetzt sind, ergibt sich aus seinem spezifischen Widerstand  $\rho$ , seiner Querschnittsfläche  $A$  und der Stromstärke  $I$  zu  $|\vec{E}| = I \cdot \rho / A$ . Für Kupfer mit  $\rho \approx 1,7 \cdot 10^{-8}$   $\Omega\text{m}$  (siehe Kap. 3.2.2 in [10]) und einem Drahtdurchmesser von 2 mm folgt mit  $I \approx 2$  A dann  $|\vec{E}| \approx 10,8$  mV/m. Da die Beweglichkeit der Leitungselektronen gut leitender Metalle  $\mu \approx 5 \cdot 10^{-3}$   $\text{m}^2/\text{V}$  beträgt (siehe Kap. 8.1.1 in [10]), erhält man

somit Driftgeschwindigkeiten im Bereich von  $|\vec{v}_{Drift}| = \mu \cdot |\vec{E}| \approx 0,05$  mm/s.

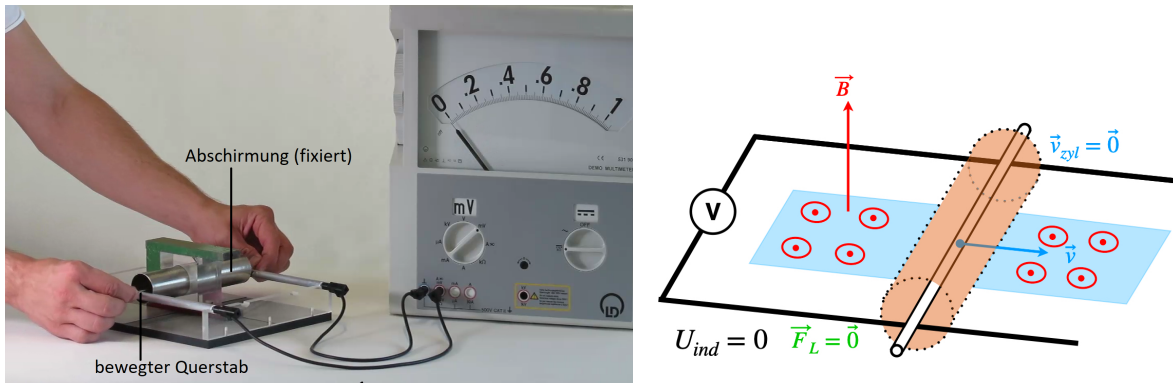
<sup>11</sup> Gemäß Gl. {1} gilt  $\vec{F}_{Leiter} = N \cdot \vec{F}_L = I \cdot \Delta t \cdot \vec{v}_{Drift} \times \vec{B}$ , da die in einem Zeitintervall  $\Delta t$  geflossene Ladungsmenge dem Strom  $I = N \cdot q / \Delta t$  entspricht. Die Ladungsträger durchströmen die Strecke  $\ell$  in der Zeit  $\Delta t = \ell / |\vec{v}_{Drift}|$ . Somit gilt  $\vec{F}_{Leiter} = \ell \cdot I \cdot \vec{e}_I \times \vec{B}$ , wobei  $\vec{e}_I$  der Einheitsvektor in Richtung der technischen Stromrichtung im Querstab ist.

Als nächstes erweitern wir das Experiment aus Abb. 2a um eine magnetische Abschirmung. Allerdings können wir den Zylinder nun nicht wie in Abb. 1b fest mit dem Querstab verbinden und diesen auf die Zuleitungsschienen aufliegen: Da das Feld zwischen den Schenkeln des Permanentmagneten nicht homogen ist (siehe Anhang II), würde der weichmagnetische Abschirmzylinder nach dem Loslassen zum vertikalen Ende des U-Magneten gezogen werden.<sup>12</sup> Wir fixieren ihn daher wie in Abb. 2b gezeigt mit einer Halterung zwischen den Schenkeln des Magneten. Der aufgelegte Querstab hingegen bleibt im Inneren des Zylinders frei beweglich. Lassen wir nun einen Strom der Stärke  $I \approx 1,85 \text{ A}$  fließen, bewegt sich der Querstab nicht (siehe Video 2). Der Abschirmzylinder erfüllt also seinen Zweck: Die magnetische Flussdichte am Ort der Ladungsträger ist null und die Lorentzkraft verschwindet. Das Experiment in 2b ist also keine Umkehrung des Induktionsexperiments aus Abb. 1b, bei der die Abschirmung keine Wirkung entfaltet. Bei beiden Versuchen ruht der

Permanentmagnet und die Ladungen werden relativ zu diesem bewegt. Sie unterscheiden sich aber darin, dass beim Induktionsexperiment in Abb. 1b auch die Abschirmung bewegt wird, wohingegen sie beim Experiment aus Abb. 2b ruht. Wir werden daher überprüfen, ob es auch für das Induktionsexperiment den entscheidenden Unterschied macht, ob die Abschirmung bewegt wird oder nicht.

### 3.2 Versuch zur Bewegungsinduktion ohne Mitführung der Abschirmung

Im Gegensatz zu der in Abb. 1b gezeigten Vorgehensweise bewegen wir den Abschirmzylinder nun nicht gemeinsam mit dem Querstab. Stattdessen fixieren wir ihn zwischen den Schenkeln des Permanentmagneten und bewegen lediglich den aufgelegten Querstab in seinem Inneren (siehe Abb. 3): Dabei wird keine Spannung induziert (siehe auch das Video 3). Aus  $U_{ind} = 0$  folgt also  $\vec{F}_L = \vec{0}$ . Dass in diesem Experiment keine Flussänderung auftritt, ist auch aus der Skizze ersichtlich.



**Abb. 3:** Variation des Versuchs aus Abb. 1b. Wird der Abschirmzylinder fixiert und nur der Querstab bewegt, wird keine Spannung induziert (siehe das Video 3).

Induktion trotz mitbewegter Abschirmung (Abb. 1b)	Ruhende Abschirmung unterdrückt Induktion (Abb. 3)	Ruhende Abschirmung unterdrückt Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter (Abb. 2b)

**Tabelle 1:** Übersicht der Experimente mit magnetischer Abschirmung. Die Ladungsträger bewegen sich jeweils mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , entweder weil der aufgelegte Querstab verschoben wird oder aufgrund eines Stromflusses (rechts:  $\vec{v} = \vec{v}_{Drift}$ ).

<sup>12</sup> Aus dem gleichen Grund haben wir das Experiment auch nicht in der Leiterschaukel-Konfiguration durchgeführt, bei der eine magnetisch abgeschirmte Schleife in vertikaler Position zwischen

die horizontal ausgerichteten Schenkel des U-Magneten gehängt wird (diese Versuchsversion ist in [27] beschrieben).

### 3.3 Schlussfolgerung

Ein Vergleich der Experimente aus den Abbildungen 1 bis 3 zeigt, dass es eine Rolle spielt, wie die Versuchskomponenten – felderzeugender Magnet, magnetische Abschirmung und Querstab – relativ zueinander bewegt werden (siehe Tabelle 1):

- Es wirkt eine Lorentzkraft beim Induktionsexperiment aus Abb. 1b, bei dem der aufgelegte Querstab gemeinsam mit dem Abschirmzylinder bewegt wird.
- Es wirkt keine Lorentzkraft, wenn Magnet und Abschirmung im Laborsystem ruhen und sich die Ladungsträger relativ zu diesem bewegen, sei es weil eine Spannungsquelle einen Stromfluss hervorruft (Abb. 2b) oder beim Induktionsexperiment nur der Querstab verschoben wird (Abb. 3).

Im nächsten Abschnitt werden wir die Wirkungsweise der magnetischen Abschirmung erläutern und anschließend die Experimente im Einzelnen analysieren.

### 4. Relativbewegungen und Feldkomponenten: eine Analyse der Experimente mit magnetischen Abschirmungen

Wie wir im Folgenden zeigen werden, gibt es bei unseren Versuchen zwei felderzeugende Elemente: den Permanentmagneten und den Abschirmzylinder, der in dessen Feld magnetisiert wird. Wir werden die resultierende Feldverteilung der magnetischen Flussdichte in ihre Beiträge zerlegen, um das Auftreten oder Verschwinden der Lorentzkraft zu erklären.

#### 4.1 Lorentzkraft und Relativbewegung bei mehreren felderzeugenden Objekten

Bei der Lorentzkraft kommt es nur auf die Relativbewegung zwischen Ladungen und felderzeugendem Element an. Es ist also egal, ob der Magnet ruht und sich die Ladung bewegt oder eine im Raum ruhende Ladung dem Feld eines sich bewegenden Magneten ausgesetzt ist.

Bewegt man wie in Abb. 1a den Querstab mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , während der Magnet im Labor ruht,  $\vec{v}_M = \vec{0}$ , wirkt gemäß Gl. {1} auf die Ladungen die Kraft  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ . Nach Einstein ist aber die elektromagnetische Kraft  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$  (siehe Gl. {4}) in allen inertialen Bezugssystemen die gleiche – also auch in einem mit dem Querstab bewegten

Bezugssystem, dem Ruhesystem der Leitungselektronen, in dem diese Ladungen die Geschwindigkeit  $\vec{v}' = \vec{0}$  haben. Dort sorgt aber ein elektrisches Feld  $\vec{E}'$  für die gleiche Kraftwirkung<sup>13</sup>  $q \cdot \vec{E}' = \vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ . Die wirkenden Felder hängen also vom gewählten Bezugssystem ab und man muss sie bei einem Wechsel entsprechend transformieren [9, 13, 14, 15, 22, 23, 24]. Diesen zusätzlichen konzeptionellen und mathematischen Aufwand wollen wir im Folgenden vermeiden und fokussieren daher auf die vom inertialen Bezugssystem unabhängige Kraft. Auf diese Weise müssen wir uns gar nicht mehr darum kümmern, in welchen Bezugssystemen neben der magnetischen Flussdichte noch ein elektrisches Feld existiert (die Beschreibungen im Kraft- und Feldbild sind äquivalent). Auch die Relativgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_M = \vec{v}' - \vec{v}_M' \quad \{9\}$$

zwischen Leitungselektronen und Magneten ist in beiden Bezugssystemen die gleiche: Im Laborsystem ist  $\vec{v}_M = \vec{0}$  und somit  $\vec{v}_{rel} = \vec{v}$ ; im Ruhesystem der Elektronen ist hingegen  $\vec{v}' = \vec{0}$ ; hier bewegt sich aber der Magnet mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_M' = -\vec{v}$ , so dass ebenfalls  $\vec{v}_{rel} = \vec{v}' - \vec{v}_M' = \vec{v}$  gilt. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn der Querstab tatsächlich im Laborsystem ruht und wir stattdessen den Magneten bewegen.<sup>14</sup> Wir können die wirkende elektromagnetische Kraft (Gl. {4}) daher in einer vom Bezugssystem unabhängigen Form als

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v}_{rel} \times \vec{B}) \quad \{10\}$$

schreiben und im Folgenden weiter als Lorentzkraft bezeichnen (dies ist die Verallgemeinerung des Spezialfalls in Gl. {1}). Gl. {10} lässt sich nun leicht auf Situationen verallgemeinern, in denen mehrere felderzeugende Systeme (stromdurchflossene Spulen, Permanentmagnete oder magnetisierte Objekte) vorliegen, die unterschiedlich bewegt werden. Rufen diese Systeme am Ort  $\vec{r}$  einer Ladung  $q$  jeweils eine magnetische Flussdichte  $\vec{B}_k(\vec{r})$  hervor, so ist die resultierende Flussdichte

$$\vec{B}_{ges}(\vec{r}) = \sum_k \vec{B}_k(\vec{r}). \quad \{11\}$$

Bewegt sich die Ladung bezüglich der felderzeugenden Systeme mit einer Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_{rel,k}$ , so ergibt sich die resultierende Lorentzkraft aus der Superposition der Einzelkräfte zu:

<sup>13</sup> Bewegt man wie in Abb. 1a den Querstab mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , während der Magnet im Labor ruht, so herrscht im Laborsystem eine magnetische Flussdichte  $\vec{B}$ , jedoch kein elektrisches Feld ( $\vec{E} = \vec{0}$ ): Die wirkende Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  ist aus Sicht der klassischen Physik also eine magnetische Kraft. Betrachtet man die Situation hingegen im Ruhesystem der Leitungselektronen, also in einem mit dem Querstab bewegten Bezugssystem, so ist dort  $\vec{v}' = \vec{0}$  und somit auch  $q \cdot (\vec{v}' \times \vec{B}') = \vec{0}$ . Da nach Einstein die elektromagnetische Kraft (Gl. {4}) in allen inertialen Bezugssystemen gleich ist, gilt  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot (\vec{v}' \times \vec{B}' + \vec{E}') = q \cdot \vec{E}'$ . Im Ruhesystem der Elektronen ist die wirkende Kraft also mit einem elektrischen Feld  $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$  verknüpft (siehe Abb. 8 in [22]), unabhängig davon, ob  $\vec{B}$  räumlich homogen oder inhomogen ist (nur

im letzteren Fall ist ein Elektron am Ort  $\vec{r}'$  einer zeitlich veränderlichen Flussdichte  $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{r} - \vec{v} \cdot t)$  ausgesetzt). Im Gegensatz zu den elektrischen Feldern sind die magnetischen Flussdichten in allen Inertialsystemen die gleichen,  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}'(\vec{r})$ , solange die Relativgeschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen [9, 14].

<sup>14</sup> Analoges gilt, wenn wir den Querstab im Laborsystem ruhen lassen und stattdessen den Magneten mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_M = -\vec{v}$  bewegen: Im Bezugssystem des Magneten ist dann  $\vec{E}' = \vec{0}$ , der Querstab hingegen bewegt sich mit  $\vec{v}' = -\vec{v}_M$  und die Leitungselektronen sind der Kraft  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v}' \times \vec{B}') = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  ausgesetzt. Daran ändert sich auch nichts im Laborsystem, in dem Querstab und Ladungen ruhen, aber ein elektrisches Feld  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$  und damit die gleiche Kraft  $\vec{F}_L = q \cdot \vec{E}$  wirkt.

$$\vec{F}_L = q \cdot \sum_k (\vec{v}_{rel,k} \times \vec{B}_k(\vec{r})) \quad \{12\}$$

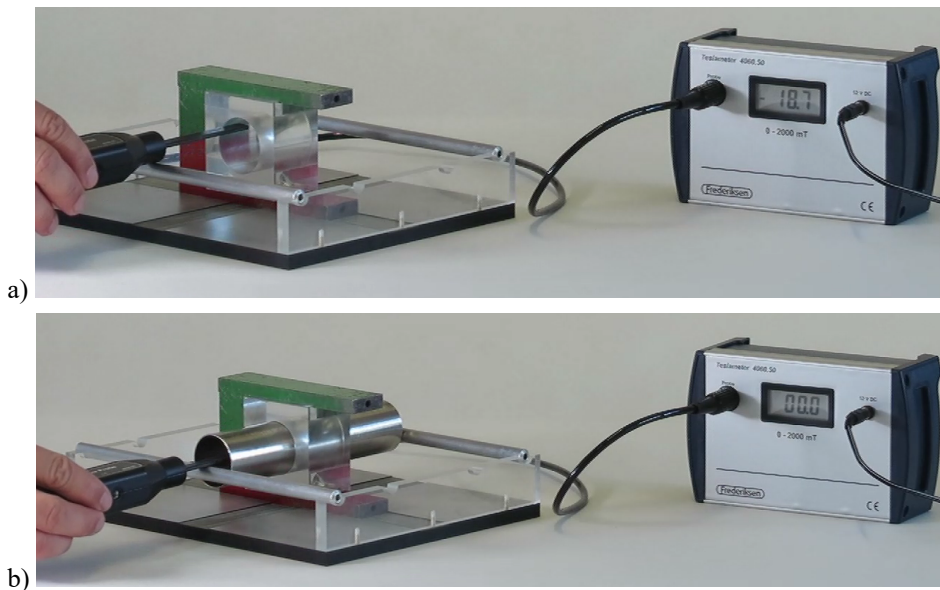
Für den Fall, dass nur ein Magnet vorhanden ist, der im Laborsystem ruht ( $\vec{v}_M = \vec{0}$ ), während sich dort die Ladung  $q$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, reduziert sich Gl. {12} wieder auf Gl. {1}. Bei einem gemeinsam mit einer Ladung bewegten Magneten,  $\vec{v} = \vec{v}_M$ , verschwindet die Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_{rel}$  und somit auch die Lorentzkraft.<sup>15</sup>

#### 4.2 Feldverteilung eines Abschirmzylinders im homogenen äußeren Feld

Unser Mu-Metall-Zylinder ist das magnetische Analogon zum Faraday'schen Käfig, also einer elektrischen Abschirmung: Setzt man ein metallisches Gehäuse einem elektrischen Feld aus, werden die Leitungselektronen so verschoben, dass sein Inneres feldfrei bleibt. Werden Umhüllungen aus weichmagnetischen Materialien hoher Permeabilität einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt, werden sie so magnetisiert, dass das Feld im Inneren zwar nicht vollständig verschwindet, aber die Feldstärke um Größenordnungen reduziert wird [20, 25, 26].

Im Folgenden nehmen wir vereinfachend an, dass das äußere Feld näherungsweise räumlich homogen ist,

auch wenn das zwischen den Schenkeln des Hufeisenmagneten nicht der Fall ist. Wir bezeichnen diese magnetische Flussdichte mit  $\vec{B}_a$ . Das sich bei Einfügen des Abschirmzylinders einstellende Gesamtfeld nennen wir  $\vec{B}_{ges}$ . Die Feldverteilung lässt sich für geometrisch einfache Fälle wie einen langen Zylinder im transversalen homogenen magnetischen Feld auch analytisch berechnen [25, 26]. Im Grenzfall hinreichend kleiner<sup>16</sup> statischer Felder ergibt sich für die Abschirmwirkung, d. h. für den Betrag des Feldes im Rohrrinneren geteilt durch den Betrag des angelegten äußeren Feldes:  $|\vec{B}_{ges,i}|/|\vec{B}_a| = (1 + \mu \cdot d/(2r_0))^{-1}$ , wobei  $\mu$  die relative Permeabilität des Materials,  $d$  die Wandstärke des Zylinders und  $r_0$  sein Innenradius bezeichnet [20, 25, 26]. Mit hochpermeablen Materialien ( $\mu \gg 1$ ) lassen sich also beträchtliche Feldreduktionen bewirken. Da allerdings im Feld unseres Permanentmagneten die Sättigungsmagnetisierung der Abschirmung erreicht und ihre Funktion beeinträchtigt sein könnte, haben wir die Abschirmwirkung durch eine Messung mit einer Hallsonde überprüft (siehe Abb. 4 und Video 4). In der Mitte zwischen den Schenkeln des U-Magneten messen wir eine magnetische Flussdichte von maximal  $|\vec{B}_a| = 21,5$  mT.

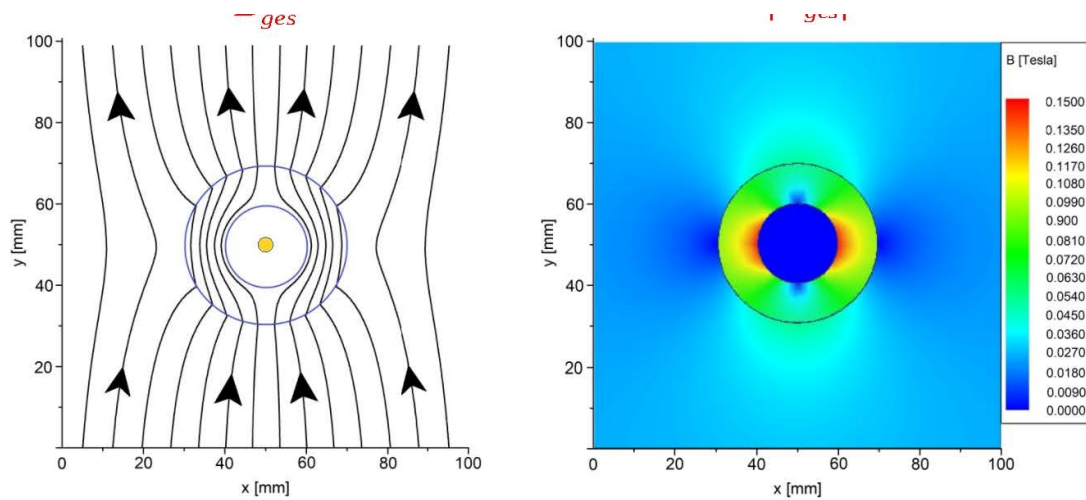


**Abb. 4:** **a)** Zwischen den 10 cm langen Schenkeln des U-förmigen Permanentmagneten wird mit einer Hallsonde (Frederiksen Teslameter 4060.50) eine magnetische Flussdichte von etwa  $|\vec{B}_a| \approx 18,7$  mT gemessen, maximal  $\approx 21,5$  mT. **b)** Im Inneren des Abschirmzylinders, der mit einer Plexiglashalterung zwischen den Schenkeln des U-Magneten fixiert wird, misst man hingegen  $|\vec{B}_{ges,i}| \approx 0,0$  mT. Der Zylinder besteht aus Mu-Metall, einem weichmagnetischen wärmebehandelten Material hoher relativer Permeabilität (Firma SEKELS GmbH [21]; Innendurchmesser 35 mm, Wandstärke 1 mm, Länge 169 mm). Siehe hierzu auch das Video 4.

<sup>15</sup> Im Ruhesystem der Leitungselektronen existiert dann kein elektrisches Feld,  $\vec{E}' = \vec{0}$ , und ihre Geschwindigkeit verschwindet,  $\vec{v}' = \vec{0}$ , so dass  $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v}' \times \vec{B}) = \vec{0}$  gilt. Gleiches muss gemäß Gl. {4} auch im Laborsystem gelten, d. h.  $\vec{0} = \vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Dort existiert also zusätzlich ein elektrisches Feld  $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$ .

<sup>16</sup> Die Abschirmung funktioniert gut, solange im Wandmaterial die Magnetisierung proportional zum Magnetfeld ist, welche jedoch nicht größer als die Sättigungsmagnetisierung werden kann. Um auch starke Magnetfelder abschirmen zu können, benötigt man daher Materialien mit hoher Sättigungsmagnetisierung.





**Abb. 5:** Simulation der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}_{ges}$  eines Mu-Metall-Abschirmzylinders in einem homogenen äußeren Feld  $\vec{B}_a$  (Simulation mit der Software *ANSYS Electronics Desktop 2019 R2* für  $|\vec{B}_a| = 25$  mT; diese liefert die vektorielle magnetische Flussdichte auf einem Netz von Raumpunkten, aus denen die Feldliniendarstellung mittels eines selbstgeschriebenen Programms ermittelt wurde). Links dargestellt sind die Feldlinien [die gelbe Kreisfläche deutet die Position des Querstabes an] bzw. rechts der Betrag der Gesamtfeldstärke  $|\vec{B}_{ges}|$  in farblicher Darstellung von 0 T (dunkelblau) bis 150 mT (rot). Der Innenraum des Zylinders ist praktisch feldfrei ( $\vec{B}_{ges} \approx \vec{0}$ ), die Feldlinien werden um ihn herumgeführt. Innerhalb des hochpermeablen Wandmaterials hingegen gilt fast überall  $|\vec{B}_{ges}| \gg |\vec{B}_a|$ .

Platzieren wir hingegen den Abschirmzylinder zwischen den Schenkeln des U-Magneten, erhalten wir in seinem Inneren  $|\vec{B}_{ges,i}| = 0,0$  mT. Im Rahmen der Messgenauigkeit ist die Feldstärke damit kleiner als 0,05 mT. Damit erhalten wir ein Feldverhältnis  $|\vec{B}_{ges,i}|/|\vec{B}_a| < 2 \cdot 10^{-3}$ . Das bedeutet, dass die magnetische Flussdichte im Zylinderinneren mindestens um einen Faktor 500 gegenüber dem äußeren Feld des U-Magneten reduziert ist.

In Lehrbüchern werden meist nur qualitative Feldlinienskizzen gezeigt.<sup>17</sup> Daher illustrieren wir in Abb. 5 die Wirkung des hochpermeablen Materials anhand der Ergebnisse einer numerischen Simulation: Die Feldlinien von  $\vec{B}_{ges}$  werden im Wandmaterial um das Innere des Zylinders herumgeführt; in der Wandung liegen sie hingegen dichter beieinander, da dort die Feldstärke erhöht ist.

### 4.3 Komponentenzersetzung der magnetischen Flussdichte in Beiträge des Permanentmagneten und des Abschirmzylinders

Der Abschirmzylinder besteht aus einem weichmagnetischen ferromagnetischen Material hoher Permeabilität, das in seiner Umgebung zunächst gar kein Feld erzeugt. Bringt man ihn jedoch in das Feld des U-Magneten, so wird das Material magnetisiert, d. h. die magnetischen Momente der Atome richten sich (im Mittel) parallel zur Richtung des angelegten

Feldes aus. Damit wird der Zylinder selbst zu einem Magneten, der ein Feld  $\vec{B}_{Zyl}$  erzeugt. Das entstehende Gesamtfeld ist dann die Superposition

$$\vec{B}_{ges}(\vec{r}) = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl}(\vec{r}). \quad \{13\}$$

In Abb. 6 zeigen wir die Zerlegung des aus einer numerischen Simulation bestimmten Gesamtfeldes  $\vec{B}_{ges}$  aus Abb. 6 in seine beiden Komponenten  $\vec{B}_a$  und  $\vec{B}_{Zyl} = \vec{B}_{ges} - \vec{B}_a$ . Die Darstellung in Abb. 6 rechts zeigt, dass die Magnetisierung im Außenraum des Zylinders eine dipolartige Feldverteilung hervorruft. Das Feld im Innenraum hingegen ist dem angelegten Feld entgegengesetzt und in guter Näherung betragsmäßig gleich (siehe die Farbskalierung der Intensitätsverteilung). Es gilt daher:

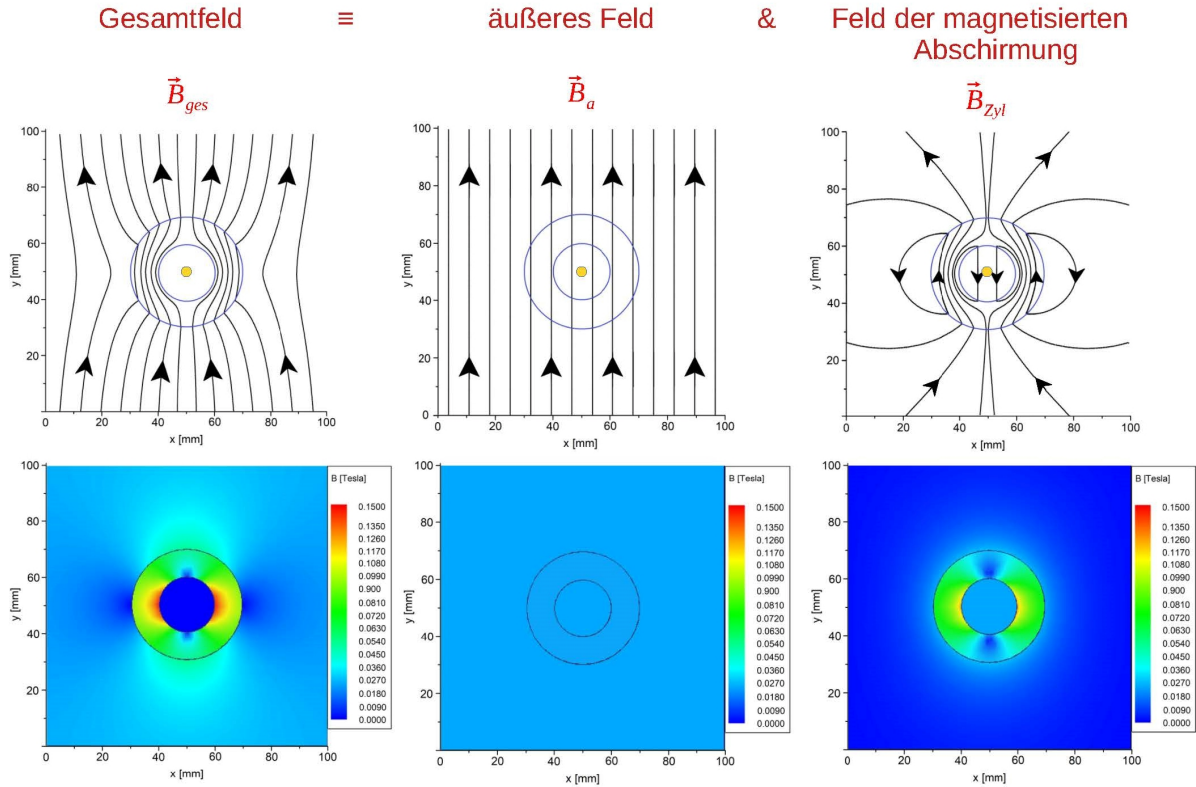
$$\vec{B}_{Zyl,i} \approx -\vec{B}_a \quad \{14\}$$

Das äußere Feld und das Feld des magnetisierten Materials heben sich im Inneren des Hohlzylinders näherungsweise auf, so dass das Gesamtfeld aus Gl. {13} fast vollständig verschwindet:

$$\vec{B}_{ges,i} \approx \vec{0} \quad \{15\}$$

Als Fazit können wir festhalten, dass wir die magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{ges}$  in zwei Komponenten zerlegen können:

<sup>17</sup> Siehe Kap. 3.6.5 in [10] oder [18].



**Abb. 6:** Feldzerlegung der numerisch berechneten Flussdichte  $\vec{B}_{ges}$  (vgl. Abb. 5) in die vom Permanentmagneten erzeugte Flussdichte  $\vec{B}_a$  (angelegtes homogenes äußeres Feld) und den durch die Magnetisierung des Abschirmzylinders und sein Streufeld hervorgerufenen Beitrag  $\vec{B}_{Zyl}$ , berechnet aus der Differenz  $\vec{B}_{ges} - \vec{B}_a$ , vgl. Gl. {13}. Obere Bildreihe: Feldliniendarstellung [die gelbe Kreisfläche deutet die Position des Querstabes an]. Untere Bildreihe: Betrag der Feldstärke in farblicher Darstellung von 0 T (dunkelblau) bis 150 mT (rot) für ein angelegtes Feld der Stärke  $|\vec{B}_a| = 25$  mT (hellblau, mittleres Bild) [die Umrisse des Abschirmzylinders sind ebenfalls eingezeichnet]. Da sich angelegtes Feld und Streufeld im Zylinderinneren aufheben ( $\vec{B}_{Zyl,i} \approx -\vec{B}_a$ ), ist das Zylinderinnere näherungsweise feldfrei ( $\vec{B}_{ges,i} \approx \vec{0}$ ).

in das äußere Feld  $\vec{B}_a$  und das Feld des magnetisierten Zylinders  $\vec{B}_{Zyl}$ . Letzteres existiert nur, wenn der weichmagnetische Zylinder dem äußeren Feld ausgesetzt ist. Da dies bei den hier betrachteten Experimenten der Fall ist, können wir uns im Folgenden auch vereinfachend vorstellen, das Gesamtfeld  $\vec{B}_{ges}$  entstünde aus der Superposition der Felder zweier Magneten, die wir gemeinsam oder unabhängig voneinander bewegen.

#### 4.4 Im Laborsystem ruhender Magnet und Abschirmung (Experimente Abb. 2b und 3)

Ruhen Magnet und Abschirmzylinder im Laborsystem, bewegen sich die Ladungen mit der gleichen Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_{rel,M} = \vec{v}_{rel,Zyl} = \vec{v}$  bezüglich des Permanentmagneten, der das äußere Feld  $\vec{B}_a$  erzeugt, und auch zur magnetisierten Abschirmhülle, die das Feld  $\vec{B}_{Zyl,i}$  erzeugt, so dass aus Gl. {12} folgt:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_L &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_a + \vec{v} \times \vec{B}_{Zyl,i}) \\
 &= q \cdot (\vec{v} \times \{\vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i}\}) \\
 &= q \cdot (\vec{v} \times \underbrace{\vec{B}_{ges,i}}_{\approx \vec{0}}) = \vec{0} \quad \{16\}
 \end{aligned}$$

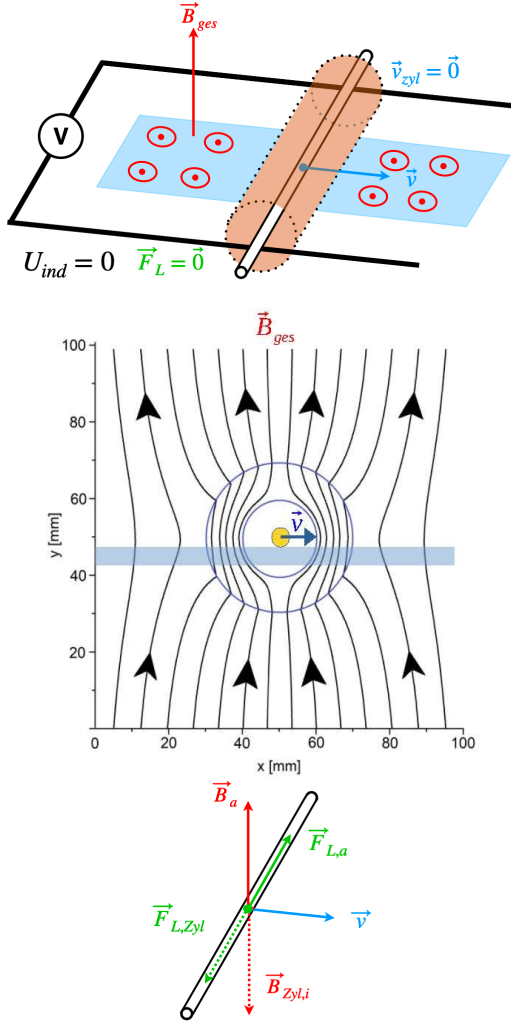
Die Lorentzkräfte der Feldkomponenten heben sich auf, da das im Laborsystem erzeugte Gesamtfeld im Zylinderinneren verschwindet (siehe Gl. {15}), so dass der Abschirmzylinder seine Funktion erfüllt. In Abb. 7 ist die Situation für den Induktionsversuch aus Abb. 3 skizziert.

Da sich die Lorentzkräfte aufheben, wird bei der Bewegung des Querstabes auch keine Spannung induziert, d. h. aus Gl. {7} und {16} folgt:

$$U_{ind} = \oint \frac{\vec{F}_L}{q} d\vec{s} = - \int \vec{B}_{ges,i} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \quad \{17\}$$

Kraft- und Flussbetrachtung liefern das gleiche Ergebnis, da die resultierende Lorentzkraft (Gl. {16}) und die Flussänderung durch die gleiche magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{ges,i} = \vec{0}$  bestimmt werden. In der Tat ist die vom Querstab pro Zeit überstrichene Fläche wie in Abb. 7 skizziert von keinem Feld durchsetzt.





**Abb. 7:** Illustration der Feldverhältnisse beim Induktionsexperiment aus Abb. 3. Felderzeugender Magnet und magnetisierter Abschirmzylinder ruhen im Laborsystem und erzeugen dort die magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{ges}$ . Diese verschwindet im Inneren des Zylinders, da sich dort die beiden Feldkomponenten kompensieren,  $\vec{B}_{ges,i} = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i} = \vec{0}$  (vgl. Abb. 6). Bewegt man lediglich den auf die Zuleitungen gelegten Querstab (in der mittleren Abbildung gelb skizziert) und damit seine beweglichen Leitungselektronen, heben sich die entsprechenden Komponenten der Lorentzkraft auf: Es gilt  $\vec{F}_L = \vec{F}_{L,Zyl} + \vec{F}_{L,a} = (-e) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_{Zyl,i} + \vec{v} \times \vec{B}_a) = \vec{0}$  und somit wird keine Spannung induziert (siehe Gl. {16} und {17}).

Die analoge Situation liegt beim stromdurchflossenen abgeschirmten Querstab in Abb. 2b vor. Dort bewegen sich die Leitungselektronen im feldfreien Bereich entlang der ruhenden Stabachse: Da die resultierende Lorentzkraft verschwindet, bewegt sich der aufgelegte Querstab nicht. Gl. {8} wird damit zu

$$|\vec{F}_{Leiter}| = N \cdot |\vec{F}_L| = \ell \cdot I \cdot |\vec{B}_{ges,i}| = 0. \quad \{18\}$$

#### 4.5 Im Laborsystem ruhender Magnet und mit dem Leiter bewegte Abschirmung ( $U_{ind} \neq 0$ )

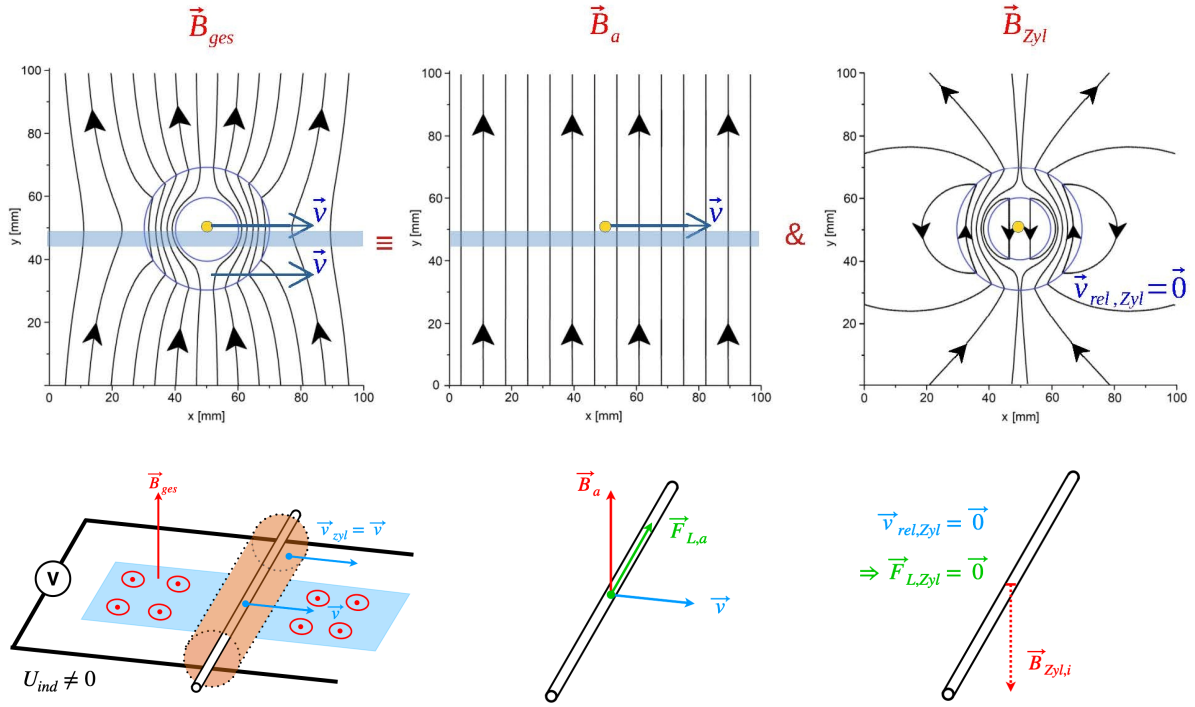
Betrachten wir nun den in Abb. 1b gezeigten Induktionsversuch, bei dem der Querstab zusammen mit dem Abschirmzylinder bewegt wird. Zwar verschwindet auch hier die Gesamtfeldstärke im Zylinderinneren und damit am Ort der Leitungselektronen des Querstabs,  $\vec{B}_{ges,i} = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i} = \vec{0}$ , für die Lorentzkraft ist das aber gar nicht die wesentliche Größe: Gemäß Gl. {12} ist die Superposition der Einzelkräfte entscheidend.

Wie in Abb. 8 gezeigt, bewegen sich der Querstab (als Teil der Leiterschleife) und damit die Leitungselektronen weiterhin mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_{rel,M} = \vec{v}$  relativ zu dem im Laborsystem ruhenden Permanentmagneten, der das Feld  $\vec{B}_a$  erzeugt. Sie bewegen sich aber nicht relativ zum mitgeführten Abschirmzylinder, der aufgrund seiner Magnetisierung im angelegten äußeren Feld ein zusätzliches Feld  $\vec{B}_{Zyl}$  hervorruft. Der Abschirmzylinder gehört also zum Ruhesystem der Ladungen oder anders formuliert: Zylinder und Ladungen bewegen sich im Laborsystem mit der gleichen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bzw. haben die Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_{rel,Zyl} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ . Auch wenn die Ladungen dem Feld  $\vec{B}_{Zyl,i} \neq \vec{0}$  ausgesetzt sind, trägt dieses somit nicht zur Lorentzkraft bei. Erstaunlich ist dies eigentlich nicht: Die Hülle wirkt wie ein mitbewegter Magnet und ist daher auch nicht induktionsrelevant. Aus Gl. {12} folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= q \cdot \left( \underbrace{\vec{v}_{rel,Zyl}}_{=\vec{0}} \times \vec{B}_{Zyl,i} + \underbrace{\vec{v}_{rel,M}}_{=\vec{v}} \times \vec{B}_a \right) \\ &= \underbrace{q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_a)}_{\vec{F}_{L,a}} \neq \vec{0} \end{aligned} \quad \{19\}$$

Obwohl sich die Felder des Permanentmagneten und des Abschirmzylinders am Ort der Ladungen aufheben, verschwindet die resultierende Lorentzkraft nicht. Hervorzuheben ist, dass man dies keinesfalls als nichtlokalen Effekt interpretieren darf: Schließlich ergibt sich  $\vec{F}_L$  aus der Superposition von Lorentzkräften, die durch die jeweilige Flussdichte am Ort der Ladung bestimmt werden. Da sich die Leitungselektronen des Querstabs lediglich relativ zum Permanentmagneten bewegen, der den Feldanteil  $\vec{B}_a$  erzeugt, ist die Lorentzkraft genau gleich groß wie beim Experiment ohne Abschirmzylinder (siehe Abschnitt 2.2). Gleiches gilt gemäß Gl. {7} damit auch für die Induktionsspannung:

$$U_{ind} = \oint \frac{\vec{F}_{L,a}}{q} d\vec{s} = - \int \vec{B}_a \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \{20\}$$



**Abb. 8:** Induktionsexperiment mit gemeinsamer Bewegung von Querstab und Abschirmung aus Abb. 1b. Die Kontaktschiene, auf der der Querstab aufliegt, ist hellblau eingezeichnet. Die Leitungselektronen des Querstabes sind der Flussdichte  $\vec{B}_{ges,i} = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i} = \vec{0}$  ausgesetzt (links). Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_{rel,M} = \vec{v}$  relativ zum Laborsystem mit dem Permanentmagneten, der die Flussdichtenkomponente  $\vec{B}_a$  erzeugt (Mitte): Diese liefert damit einen Beitrag  $\vec{F}_{L,a} = (-e) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_a) \neq \vec{0}$  zur Lorentzkraft. Die Elektronen bewegen sich aber nicht relativ zu dem mitgeführten magnetisierten Abschirmzylinder, der die Feldkomponente  $\vec{B}_{Zyl}$  erzeugt (rechts): Aus  $\vec{v}_{rel,Zyl} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$  folgt daher  $\vec{F}_{L,Zyl} = (-e) \cdot (\vec{v}_{rel,Zyl} \times \vec{B}_{Zyl,i}) = \vec{0}$ . Die resultierende Lorentzkraft  $\vec{F}_L = \vec{F}_{L,Zyl} + \vec{F}_{L,a} = \vec{F}_{L,a}$  entspricht der Lorentzkraft, die auch ohne Abschirmzylinder wirkt. Die Induktionsspannung ist daher unabhängig davon, ob man das Experiment mit oder ohne Abschirmung durchführt (siehe Gl. {20}).

Die qualitative Betrachtung der Flussänderung der Leiterschleife hat den Vorteil, dass man schon auf Anhieb erkennt, dass auch bei Abschirmung eine Induktionsspannung auftritt (siehe Abb. 8 links unten). Für eine quantitative Vorhersage muss man aber erkennen, dass die Flussänderung durch die magnetische Flussdichte  $\vec{B}_a$  bestimmt wird, so wie das auch bei der Lorentzkraft (Gl. {19}) der Fall ist. Die durch den Abschirmzylinder hervorgerufene kompliziertere Feldverteilung  $\vec{B}_{ges}$  (siehe Abb. 5 oder 8 links) benötigt man also gar nicht zur Berechnung der Induktionsspannung.<sup>18</sup> Dass dies so klar zu Tage tritt, ist ein Vorteil der Kraftbetrachtung gegenüber der formal äquivalenten Flussbetrachtung.

### 5. Quantitativer Vergleich der Induktionsspannung mit und ohne magnetische Abschirmung

Unser qualitatives Anfangsexperiment aus Abb. 1 konnte nur zeigen, dass die Induktionsspannung auch bei magnetischer Abschirmung nicht verschwindet. Da das obige Ergebnis aber deutlich darüber hinausgeht, wollen wir im Folgenden noch experimentell

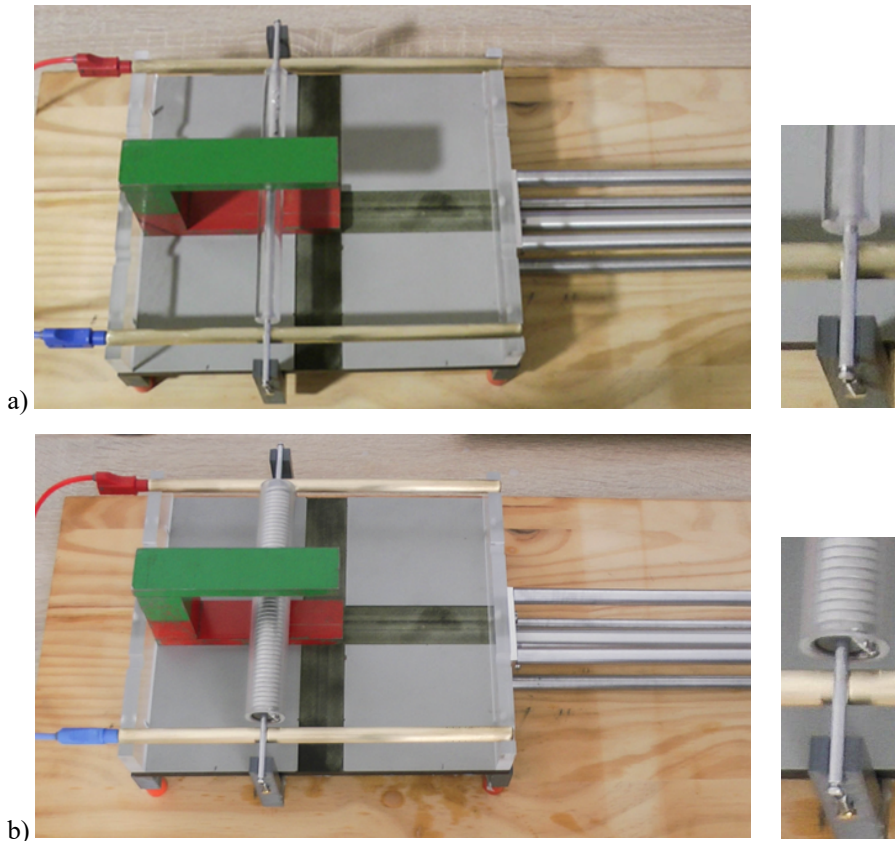
überprüfen, ob die Induktionsspannung wirklich unabhängig davon ist, ob wir ein Leiterstück zusammen mit einem Abschirmzylinder bewegen oder ob wir auf Letzteren ganz verzichten. Dazu haben wir den Aufbau aus Abb. 1 durch einen mechanischen Antrieb erweitert (siehe Abb. 9) [28].

Unter der Bodenplatte, auf der Permanentmagnet und Zuleitungsstäbe ruhen, ist eine seitlich hervorragende Halterung angebracht, die den Querstab auf die Zuleitungsschienen drückt. Diese kann über eine sich drehende Gewindestange mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts oder rückwärts bewegt werden. Der Antrieb erfolgt über einen Schrittmotor (RS 440-442 von RS Components), der von einem Mikrocontroller (Arduino Leonardo mit Verstärkereinheit L297/298) über ein Programm angesteuert wird. Dies erlaubt den Querstab mit einer konstanten Geschwindigkeit im Bereich von  $|\vec{v}| = 8 - 25 \text{ mm/s}$  zu bewegen. Zur Messung der kleinen Induktionsspannung verwenden wir ein Sensor-Cassy-System der Firma Leybold mit einer  $\mu\text{V}$ -Box.<sup>19</sup>

<sup>18</sup>Allgemein gilt  $\int \vec{B}_a d\vec{A}/dt \neq \int \vec{B}_{ges} d\vec{A}/dt$ , auch wenn in bestimmten Situationen die Werte recht nahe beieinanderliegen können (siehe das Beispiel in [18]). Es ist daher eine grundlegende

Erkenntnis, dass bei mitbewegter Abschirmung nur das äußere Feld physikalisch relevant ist.

<sup>19</sup>Auflösung von bis zu  $0,5 \mu\text{V}$  bei einem Messfehler von  $\pm 1\%$  plus  $0,5\%$  des Bereichswerts.



**Abb. 9:** Aufbau zur quantitativen Messung der Induktionsspannung ohne (a) und mit (b) magnetischer Abschirmung [vgl. die qualitativen Experimente in Abb. 1]. Fotos links: Aufbau mit Zuleitungsstangen, Permanentmagneten, Querstab und Voltmeter. Ein Elektromotor (nicht im Bild) treibt eine Gewindestange an (rechte Bildhälften), die die Halterung des Querstabes mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Der Querstab ist in der Mitte zwischen den Zuleitungsstangen von einem Plexiglaszylinder umgeben (siehe kleines Foto oben rechts), über den ein magnetischer Abschirmschlauch geschoben werden kann, der wiederum mit einem zweiten Plexiglaszylinder fixiert wird (Foto unten rechts).<sup>20</sup> Siehe hierzu auch das Video 5.

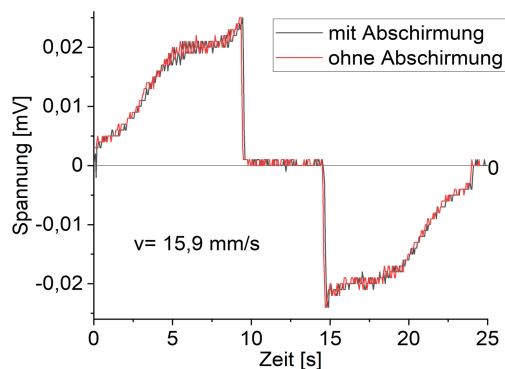
Der Querstab ist im Bereich zwischen den Zuleitungsstangen auf einer Länge von 17 cm von einem Plexiglaszylinder umgeben (Abb. 9a), über den ein flexibler magnetischer Abschirmschlauch geschoben werden kann (Abb. 9b). Sein Innendurchmesser ist mit 16 mm kleiner als der des in den Abb. 1 bis 4 gezeigten massiven Zylinders. Auch seine Abschirmwirkung ist nach Herstellerangaben geringer:<sup>21</sup> Er sollte bei Feldern bis zu 10 mT aber immer noch eine Feldreduktion um einen Faktor in der Größenordnung von 200 bewirken. Da die vom Permanentmagneten erzeugte magnetische Flussdichte größer ist, haben wir dies ähnlich wie in Abb. 4 mit einer Hallsonde überprüft: Zwischen den Schenkeln am offenen Ende finden wir  $|B_a| = 15 \text{ mT}$  und  $|B_{ges,i}| \approx 0,1 \text{ mT}$ , also eine Feldreduktion um einen Faktor 150. In der Mitte zwischen dem offenen und dem geschlossenen Ende messen wir hingegen  $|B_a| \approx 20 \text{ mT}$  und  $|B_{ges,i}| \approx 0,2 - 0,3 \text{ mT}$ , also eine Feldreduktion um

einen Faktor 67 bis 100. Für unsere Zwecke ist dies völlig ausreichend.

In Abb. 10 und Video 5 zeigen wir die ohne und mit Abschirmzylinder gemessene Spannung  $U_{mess} = -U_{ind}$  als Funktion der Zeit für eine Bewegung des Querstabes mit einer Geschwindigkeit  $|\vec{v}| = 15,9 \text{ mm/s}$ . Bei Annäherung an den U-Magneten steigt die Spannung aufgrund seines Streufeldes an, bis sich der Stab zwischen den Schenkeln des Magneten befindet (siehe den Plateauwert  $U_{mess} \approx 0,02 \text{ mV}$  in der Grafik). Auch bei der weiteren Annäherung an das vertikale Endstück des Magneten nimmt die Spannung noch zu, da die magnetische Flussdichte am geschlossenen Ende des U-Magneten stärker ist als am offenen (dies lässt sich leicht mit einer Hallsonde bestätigen). Im Zeitbereich von etwa 10-15 s ruht der Querstab und wird dann wieder aus dem Magneten herausbewegt, wobei eine vom Vorzeichen umgekehrte aber betragsmäßig gleiche Spannung gemessen wird.

<sup>20</sup> Zuleitungsstangen: Messing, Durchmesser 1 cm. Querstab: Aluminium, Durchmesser 4 mm. Plexiglaszylinder: Länge 170 mm, Außendurchmesser 15 mm.

<sup>21</sup> SEA440-A1097-B019-50, SEKELS GmbH [20]. Die flexiblen Abschirmschläuche sind aus spiralförmig geformten Bändern aufgebaut und können auf die benötigten Längen zugeschnitten werden. Als Standardprodukte sind sie weitaus kostengünstiger als Einzelanfertigungen aus massivem Material.



**Abb. 10:** Gemessene Spannung  $U_{mess} = -U_{ind}$  für den Fall, dass der Querstab mit einer Geschwindigkeit vom Betrag  $|\vec{v}| = 15,9 \text{ mm/s}$  von rechts nach links zwischen die Schenkel des U-Magneten bewegt und nach wenigen Sekunden Wartezeit wieder mit der gleichen Geschwindigkeit zurückgefahren wird (siehe Video 5). Die Induktionsspannung ist die gleiche, egal ob der Querstab magnetisch abgeschirmt wird oder nicht. Der bewegte Querstab ist auch seitlich des U-Magneten diesem Streufeld ausgesetzt. Dieses trägt daher wie in Anhang II ausgeführt zur Lorentzkraft bzw. zur Induktionsspannung bei.

Der Vergleich der beiden Kurven belegt die theoretische Vorhersage aus Abschnitt 4.5, d. h. Gl. {19} und {20}: Die bei Einsatz des mitgeführten Abschirmzylinders gemessene Induktionsspannung stimmt im Rahmen der Messgenauigkeit mit der überein, die man ohne Abschirmzylinder misst.

Dies ist im Übrigen auch von technischer Relevanz. Würde die Lorentzkraft durch mit dem Leiter bewegte magnetisierte Materialien abgeschwächt, wäre auch die Funktionsweise elektrischer Generatoren beeinträchtigt, bei denen die Leiterschleifen in den Nuten eines rotierenden Eisenankers liegen [18]: Je höher die Permeabilität des Eisens, desto schwächer ist  $\vec{B}_{ges}$  am Ort der Leiterschleife.

## 6. Zusammenfassung und möglicher Einsatz in der Lehre

Unsere experimentellen Befunde und die Argumentation haben wir nochmals in Tabelle 2 zusammengefasst. Das Feld des Permanentmagneten und das Feld im Inneren der magnetischen Abschirmhülle heben sich auf, so dass die Gesamtfeldstärke  $\vec{B}_{ges}$  am Ort der bewegten Ladungen verschwindet. Für die resultierende Lorentzkraft kommt es aber darauf an, relativ zu welchem felderzeugenden Element sich die Leitungselektronen des Querstabes bewegen. Wird bei der Bewegung des Leiterstückes die Abschirmung mitgeführt, trägt nur die Bewegung relativ zum Permanentmagneten zur Lorentzkraft bei, so dass genau die gleiche Induktionsspannung gemessen wird wie beim

Experiment ohne Abschirmung (siehe Gl. {19} und {20}). Der vermeintliche Widerspruch zum Faraday'schen Gesetz existiert also gar nicht. Ruhen Abschirmung und Permanentmagnet hingegen gemeinsam im Laborsystem, so heben sich die entgegengesetzten Teilkräfte gerade auf, so dass resultierende Lorentzkraft und Induktionsspannung verschwinden (siehe Gl. {16} und {17}). Als Verallgemeinerung können wir festhalten:

*Sind mehrere felderzeugende Objekte vorhanden, die bezüglich einer Ladung unterschiedliche Relativgeschwindigkeiten haben, können sich deren Felder am Ort der Ladung aufheben,  $\sum \vec{B}_k = \vec{0}$ , ohne dass die Summe der Lorentzkräfte verschwindet,  $\sum q \cdot (\vec{v}_{rel,k} \times \vec{B}_k) \neq \vec{0}$ . Bei Induktionsexperimenten führt die Betrachtung der wirkenden Kräfte zum gleichen Ergebnis wie die Betrachtung der Flussänderung.*

Unseres Erachtens lohnt es sich aus zweierlei Gründen, die hier beschriebenen Experimente zur Bewegungsinduktion mit und ohne Abschirmungen vorzuführen bzw. die beigelegten Videos zu zeigen. Zum einen rufen sie nochmals ins Gedächtnis, dass das Auftreten einer Induktionsspannung an die Wirkung einer Kraft gekoppelt ist (siehe Gl. {5}), d. h. dass das eine nicht ohne das andere auftreten kann. Zum anderen erlauben sie, das für die Lorentzkraft so wichtige Konzept der Relativbewegung zu vertiefen. Geeignet scheinen sie uns auf jeden Fall für eine Grundvorlesung der Elektrodynamik, die i. A. im 2. Studiensemester der Physik gehalten wird.

Statt auf mathematische Elemente wie Gl. {9}-{20} Bezug zu nehmen, kann man auch qualitativ argumentieren: Die Abschirmung wirkt wie ein entgegengesetzt gepolter Magnet, der aber keine Auswirkung auf die Lorentzkraft hat, wenn er mit dem Leiter bewegt wird.

Wohlwissend, dass in der gymnasialen Oberstufe nur wenig Zeit sein wird, zusätzliche Experimente mit Abschirmungen im Unterricht durchzuführen, ist es uns wichtig, dass Lehrkräfte sich beim Thema Induktion nicht dazu verleiten lassen, den magnetischen Fluss als physikalisch grundlegender anzusehen als Erklärungen über wirkende Kräfte. Beide Betrachtungen sind äquivalent und sollten im Physikunterricht behandelt werden. Das Konzept der Flussänderung ist mit einer integralen Größe verknüpft und daher abstrakter, vereinfacht aber viele Probleme.<sup>22</sup> Das Kraftbild ist schon seit der Mittelstufe in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler etabliert und führt das Phänomen der Induktion auf bewährte Argumentationsmuster zurück. Es unterstreicht den lokalen Wirkungsmechanismus, dem die Ladungsträger ausgesetzt sind und hilft, kognitive Konflikte zu vermeiden.

<sup>22</sup> Bei den hier diskutierten Experimenten ist bei der Betrachtung des magnetischen Flusses auf Antrieb erkennbar, in welchen Fällen Bewegungsinduktion auftritt bzw. nicht auftritt. Die

Kraftbetrachtung verdeutlicht allerdings, welche magnetischen Flussdichten jeweils zur Berechnung der Induktionsspannung heranzuziehen sind.



<p><b>Induktion trotz mitbewegter Abschirmung (Abb. 1b, 8,9,10)</b></p>	<p><b>Ruhende Abschirmung unterdrückt Induktion (Abb. 3, 7)</b></p>	<p><b>Ruhende Abschirmung unterdrückt Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter (Abb. 2b)</b></p>
<p><b>Magnetische Flussdichte am Ort der Ladungsträger: <math>\vec{B}_{ges,i} = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i} = \vec{0}</math> (unabhängig vom Bezugssystem)</b></p>		
<p><b>Im Laborsystem ruhende Elemente und von diesen erzeugte Flussdichte,</b> relativ zu denen sich die Leitungselektronen mit <math>\vec{v}_{rel} = \vec{v}</math> bewegen</p>		
<p>Voltmeter, Zuleitungen, Permanentmagnet (<math>\vec{B}_a</math>)</p> <p>(am Ort des Querstabs: <math>\vec{B}_a \neq \vec{0}</math>)</p>	<p>Voltmeter, Zuleitungen, Permanentmagnet (<math>\vec{B}_a</math>), Abschirmzylinder (<math>\vec{B}_{Zyl}</math>)</p> <p>(am Ort des Querstabs <math>\vec{B}_{ges,i} = \vec{0}</math>)</p>	<p>Stromquelle, Zuleitungen, Querstab, Permanentmagnet (<math>\vec{B}_a</math>), Abschirmzylinder (<math>\vec{B}_{Zyl}</math>)</p> <p>(am Ort des Querstabs <math>\vec{B}_{ges,i} = \vec{0}</math>)</p>
<p><b>Mit den Leitungselektronen bewegte Elemente (<math>\vec{v}_{rel} = \vec{0}</math>) und von diesen erzeugte Flussdichte</b> Geschwindigkeit <math>\vec{v}</math> im Laborsystem / <math>\vec{v}' = \vec{0}</math> im <u>Ruhsystem der Leitungselektronen</u></p>		
<p>Querstab und Abschirmzylinder</p> <p>(am Ort des Querstabs <math>\vec{B}_{Zyl,i} = -\vec{B}_a</math>)</p>	<p>Querstab</p> <p>kein B-Feld durch bewegte Elemente</p>	<p>·/·</p>
<p><math>\vec{F}_L = \vec{F}_{L,a} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_a) \neq \vec{0}</math></p> <p><math>U_{ind} = - \int \vec{B}_a \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}</math></p>	<p><math>\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_{ges,i}) = \vec{0}</math></p> <p><math>U_{ind} = - \int \vec{B}_{ges,i} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0</math></p>	<p><math> \vec{F}_{Leiter}  = \ell \cdot I \cdot  \vec{B}_{ges,i}  = 0</math></p>

**Tabelle 2:** Bei den hier vorgestellten Experimenten verschwindet die vom Permanentmagneten und der Abschirmung insgesamt erzeugte Flussdichte am Ort des Querstabes, d. h. es gilt immer  $\vec{B}_{ges,i} = \vec{B}_a + \vec{B}_{Zyl,i} = \vec{0}$  (sowohl im Laborsystem als auch im Ruhsystem der Leitungselektronen; zur Komponentenzzerlegung siehe Abb.6). Für die Lorentzkraft und die Induktionsspannung sind aber jeweils nur im Laborsystem erzeugte Komponenten der Flussdichte relevant, relativ zu dem sich die Ladungsträger, d. h. die Leitungselektronen des metallischen Querstabes, bewegen. Keinen Beitrag hingegen liefert eine im Ruhsystem der Ladungsträger erzeugte Feldkomponente (vgl. Gl {12}). Wird daher beim Induktionsexperiment der Abschirmzylinder zusammen mit dem Querstab bewegt, ist einzig das Feld des Permanentmagneten ausschlaggebend für die Lorentzkraft und man misst die gleiche Induktionsspannung wie beim Experiment ohne Abschirmung (siehe Abb. 10).

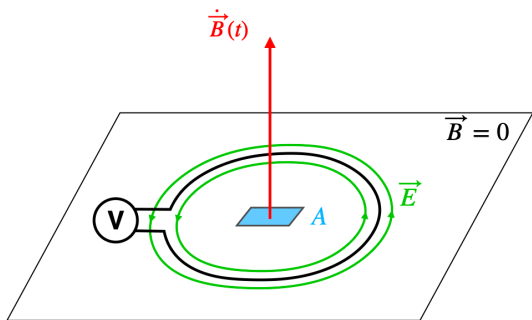
### 7. Anhang I: Zusammenhang zwischen lokal wirkender Kraft und allgemeinem Induktionsgesetz

Im Rahmen der klassischen Physik lässt sich das Induktionsgesetz nicht herleiten, weil ihm, wie in Abschnitt 2.1 ausgeführt, vermeintlich unterschiedliche Mechanismen zugrunde liegen. Man kann das Induktionsgesetz für Geschwindigkeiten  $|\vec{v}| \ll c$  aber ausgehend von der elektromagnetischen Kraft (Gl. {4}) erhalten, die in allen Inertialsystemen die gleiche ist. Aus dem Wegintegral entlang einer Messchleife im Laborsystem folgt dann nach Gl. {5} für die gemessene Induktionsspannung [9, 14, 15, 16]:

$$U_{ind} = \oint_C (\vec{F}/q) d\vec{s} = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} \quad \{21\}$$

Diese ist hier als Funktion der im Laborsystem gemessenen Felder geschrieben. Betrachten wir zunächst den ersten Summanden. Zeitlich veränderliche magnetische Felder rufen elektrische Wirbelfelder hervor] (siehe Abb.12), was sich in der Maxwellgleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$  in differentieller Form niederschlägt und mit Hilfe des Stokes'schen Satzes in die integrale Form [9, 14, 15, 16]

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = - \int_A \partial\vec{B}/\partial t d\vec{A} \quad \{22\}$$



**Abb.12:** Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ist von in sich geschlossenen elektrischen Feldlinien umgeben (was sich in der Maxwellgleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$  niederschlägt). Dieses elektrische Wirbelfeld existiert überall im Raum, also auch dort, wo kein Magnetfeld herrscht. Dort wirkt auf Ladungen also eine Kraft  $q \cdot \vec{E}$ . Legt man wie skizziert eine Leiterschleife um dieses Raumgebiet, werden die beweglichen Leitungselektronen im metallischen Draht entsprechend verschoben, so dass das Voltmeter eine Induktionsspannung anzeigt. Auch hier ändert eine magnetische Abschirmung der Leiterschleife nicht die Induktionsspannung [10]. Allerdings ist dies weniger überraschend als bei der Bewegungsinduktion, da das elektrische Feld überall im Raum existiert.

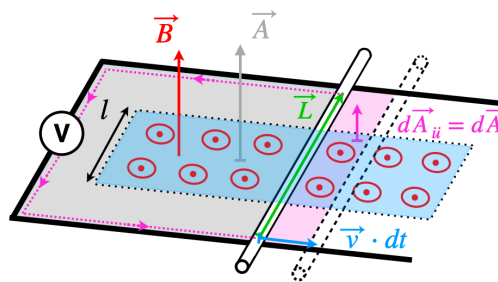
<sup>23</sup> Das Leitersegment  $d\vec{s}$  ist Teil des Integrationswegs C und damit mathematisch ein Linienelement. Physikalisch ist es Teil der betrachteten Leiterschleife und kann auf vielfältige Weise realisiert werden, sei es als bewegter Metalldraht oder auch als Segment eines massiven Körpers.

gebracht werden kann. Der zweite Summand in Gl. {21} lässt sich ebenfalls umschreiben. Es gilt

$$\oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} = - \int \vec{B} \frac{d\vec{A}_{\vec{u}}}{dt}, \quad \{23\}$$

wobei  $d\vec{A}_{\vec{u}} = (\vec{v} dt) \times d\vec{s}$  das infinitesimale Flächenelement ist, das ein bewegtes Leitersegment<sup>23</sup>  $d\vec{s}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  überstreicht [14] (siehe Abb.13). Mit Gl. {22} und {23} wird Gl. {21} daher zu [14]:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \oint_C (\vec{F}/q) d\vec{s} \\ &= - \left( \int_{\text{Schleifenfläche}} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{überstrichene Fläche pro Zeit}} \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}_{\vec{u}}}{dt} \right) \\ &= - \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad \{24\}$$



**Abb.13:** Eine Schleife zeitlich veränderlicher Kontur in einem statischen Feld  $\vec{B}$ . Die Schleifenfläche  $\vec{A}$  (grau eingefärbt) ändert sich um die vom Querstab überstrichene Fläche  $d\vec{A}_{\vec{u}}$  (rosa eingefärbt). Es gilt  $d\vec{A} = d\vec{A}_{\vec{u}} = (\vec{v} dt) \times \vec{L}$ . Für die Flussänderung ist nur die Flächenänderung im Feld entscheidend: Die Induktionsspannung ergibt sich zu  $U_{ind} = - \int \vec{B} \cdot d\vec{A}_{\vec{u}}/dt = -B \cdot \ell \cdot v$ . Zusätzlich ist der Integrationsweg violett gestrichelt eingezeichnet. Dessen Umlaufsinn legt sowohl die Richtung von  $\vec{A}$  (siehe Gl. {5}) als auch die des Wegelements  $\vec{L}$  fest.

In einfachen drahtförmigen Leiterschleifen ist, wie in Abb. 13 gezeigt, die überstrichene Fläche  $d\vec{A}_{\vec{u}}$  gleich der Änderung der Leiterschleifenfläche  $d\vec{A}$ .<sup>24</sup> In der Oberstufe sowie in experimentellen Anfängervorlesungen wird diese Unterscheidung daher zumeist gar nicht getroffen. Es gibt aber auch Anordnungen, bei denen die Änderung der Leiterschleifenfläche gar keine wohldefinierte physikalische Größe ist, was zu scheinbaren physikalischen Paradoxa führt<sup>25</sup> [22]. Gl. {24} ist die allgemeingültige Schreibweise des Faraday'schen Gesetzes (Gl. {2}) [14, 15, 16]; in

<sup>24</sup> Dies gilt auch für den in Schule und Anfängervorlesungen wichtigen Fall einer im Feld rotierenden Schleife [26].

<sup>25</sup> Dies ist der Fall, wenn der zeitabhängige Integrationsweg nicht eindeutig ist, z. B. weil er räumlich ausgedehnte Elemente enthält [10, 22].



dieser Formulierung ist es mehr als eine einfache Flussregel, die bei komplizierteren geometrischen Anordnungen versagt [9, 10, 17]. Bei der Einführung des Faraday'schen Gesetzes in der Oberstufe und in Anfängervorlesungen sollte man die einfachere Schreibweise in Gl. {2} daher um eine Präzisierung des Begriffs der Flussänderung ergänzen, die die wirkende Kraft benennt (siehe hierzu [22]).

### 8. Anhang II: Das Streufeld des U-Magneten und seine Auswirkung auf die Stärke der Lorentzkraft beim stromdurchflossenen Leiter

Die in Abb.10 gezeigte Messung spiegelt wider, dass das Magnetfeld des U-Magneten nicht homogen ist, was sich mit einer Hallsonde leicht zeigen lässt. Zum einen gibt es ein Streufeld, d. h.  $\vec{B}_a$  ist nicht nur zwischen den 3 cm breiten Schenkeln des U-Magneten von null verschieden, sondern auf der gesamten Länge  $\ell = 18$  cm zwischen den Kontaktstäben, auf die der Querstab aufgelegt ist, auch wenn es mit zunehmender Entfernung stark abfällt. Darüber hinaus ist die magnetische Flussdichte am geschlossenen Ende des U-Magneten stärker als am offenen. Gemäß Gl. {5} gilt

$$\begin{aligned} U_{ind}(x) &= \oint_C \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} d\vec{s} = -v_x \cdot \int_0^\ell B_{a,z}(x,y) dy \\ &= -v_x \cdot B_{a,z}^{eff}(x) \cdot \ell, \end{aligned} \quad \{25\}$$

wobei  $B_{a,z}^{eff}$  die längs des Querstabes auf der Länge  $\ell$  gemittelte  $z$ -Komponente der Flussdichte ist (siehe Abb. 1 links).<sup>26</sup> Diese Form entspricht der induzierten Spannung für das homogene Feld (vgl. Gl. {6} und {7}) und spiegelt das Wesentliche wider: Die Induktionsspannung ist weiterhin proportional zur Geschwindigkeit (was wir auch überprüft haben) und hängt von der Position des Querstabes ab. Mit einem Plateauwert von  $|U_{ind}| \approx 0,02$  mV (siehe Abb. 11),  $\ell = 18$  cm und  $|\vec{v}| = 15,9$  mm/s erhalten wir für eine Stabposition in der Mitte des U-Magneten  $|B_{a,z}^{eff}| \approx 7$  mT. Das Produkt  $|B_{a,z}^{eff}| \cdot \ell = 126$  mT · cm ist also doppelt so groß wie das Produkt aus dem Wert der lokalen Feldstärke in der Mitte des U-Magneten und der Schenkelbreite,  $21,5$  mT ·  $3$  cm =  $64,5$  mT · cm. Das Streufeld bewirkt daher eine Verdopplung der Induktionsspannung bzw. beim Experiment in Abb. 2a eine Verdopplung der Kraft (siehe Gl. {8}).

### 9. Dem Beitrag beigefügte Medien

- Video 1: „Bewegungsinduktion mit und ohne Abschirmung“
- Video 2: „Experiment zur Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter mit und ohne Abschirmung“
- Video 3: „Keine Induktion bei Bewegung innerhalb der ruhenden Abschirmung“
- Video 4: „Messung des B-Feldes mit und ohne Abschirmung“
- Video 5: „Quantitative Versuche zur Bewegungsinduktion mit und ohne Abschirmung“

### 10. Literatur

- [1] *Kuhn Physik 2, Grundkurse Sekundarstufe II*, Hrsg. Wilfried Kuhn, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig, Neubearbeitung 2013 (S. 184 – 207) ISBN 978-3-14-152141-2
- [2] *Dorn Bader Physik, Gymnasium SEK II*, Hrsg. Franz Bader, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig, 2010, (S. 46-92) ISBN 978-3-507-10775-5
- [3] *Dorn Bader PHYSIK, Gymnasium Gesamtband SEK II*, Hrsg. Franz Bader, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig, 2007 (S. 208-268) ISBN 978-3-507-10724-3
- [4] *Impulse Physik, Oberstufe*, Ernst Klett Verlag Stuttgart Leipzig, 1. Auflage, 2007 (S. 126-166) ISBN 978-3-12-772606-0
- [5] *Kuhn Physik, Band II, 2. Teil: Klasse 12/13*, Hrsg. Wilfried Kuhn, Westermann Schulbuchverlag GmbH, Braunschweig, 1. Auflage 1990 (S. 243-296), ISBN 3-14-152132-8
- [6] *Physik, Oberstufe Gesamtband*, Cornelsen Verlag Berlin, 1. Auflage, 2009 (S. 122-147) ISBN 978-3-06-013006-1
- [7] *Metzler Physik*, Hrsg. Joachim Krause und Joachim Grehn, Bildungshaus Schulbuchverlag Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH Braunschweig, 5. Auflage, 2020 (S. 254-275) ISBN 978-3-14-100100-6
- [8] Barth, Michel; Rubitzko, Thomas; Kienle, Rainer; Lingemann, Peter; Vogt, Patrick; Kasper, Lutz (2014): *Induktion*. In: *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*, 25), Heft 143, ISSN: 0946-2147
- [9] Dössel, E.; Druxes, H.; Kehrig, D., Kuhn, W., Siemsen, H.; Südbeck, W. (1998): *Band 5/I. Elektrizitätslehre I/1 Stationäre elektrische und magnetische Felder, Zeitabhängige elektromagnetische Felder, Wechselstrom* (Kapitel 2) aus der Reihe *Handbuch der experimentellen*

<sup>26</sup> Es gilt dann  $B_{a,z}^{eff}(x) = (1/\ell) \cdot \int_0^\ell B_{a,z}(x,y) dy$ .

- Physik: Sekundarbereich II; Ausbildung – Unterricht – Fortbildung*, Hrsg. Kuhn, Wilfried, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, ISBN 3-7614-1927-9
- [10] Raith, Wilhelm (2006): *Bergmann Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 2, Elektromagnetismus*, 9. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York (insbesondere Kapitel 4.1 und 3.6.3-3.6.5) ISBN 3-11-018898-8
- [11] *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Hrsg. Meschede, Dieter, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2015 (Kapitel 8.1) ISBN 978-3-662-45976-8
- [12] Demtröder, Wolfgang (2002): *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, korrigierter Nachdruck, Springer Verlag Berlin Heidelberg (Kapitel 4.1) ISBN 3-540-65196-9
- [13] Griffiths, David J. (2011): *Elektrodynamik, Eine Einführung*, 3. Aktualisierte Auflage, Pearson Deutschland (Kapitel 7.1.3, 7.2, 12.1.1 und 12.3) ISBN 978-3-86894-057-2
- [14] Fließbach, Torsten (2012): *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 6. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (Kapitel 16 und 22) ISBN 978-3-8274-3035-9
- [15] Nolting, Wolfgang (2013): *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 10. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg (Kapitel 4.1.1) ISBN 978-3-642-37904-8
- [16] Jackson, John David (1975): *Classical Electrodynamics, Second Edition*, John Wiley & Sons, New York (Chapter 6.1 and 5.12) ISBN 0-471-43132-X
- [17] Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Matthew (1964): *Lectures on Physics, Volume II, Mainly Electromagnetism and Matter*. Addison-Wesley Publishing Company (Kapitel 17-1, 17-2) ISBN 0-201-02117-X-P; auch unter <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/> (letzter Aufruf 6.6.2024)
- [18] Kupfmüller, K.; Mathis, W.; Reibiger, A. (2005): *Theoretische Elektrotechnik, Eine Einführung*, 16. Vollständig neu bearbeitete und aktualisierte Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York (Kapitel 31.1) ISBN 3-540-20792-9
- [19] Lambeck, M. (1984): *Lorentz-Kraft und Induktionsgesetz*. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik 9/84, S. 257-260
- [20] Siehe <https://sekels.de/>, insbesondere die Broschüre „Magnetische Abschirmungen“ unter <https://sekels.de/downloads> (letzter Aufruf am 6.6.2024)
- [21] Hübel, Horst: <https://www.forphys.de/Website/induktion/induoehne.html> (letzter Aufruf 6.6.2024)
- [22] Pelster, Rolf; Schön, Fabian; Klein, Thomas (2023): Zu den Ursachen der elektromagnetischen Induktion. Ein Gesamtüberblick und Empfehlungen zur Einführung des Faraday'schen Gesetzes, *PhyDid-A 1/22* (2023), S. 1-18, <http://phydid.de/index.php/phydid/article/view/1202> (letzter Aufruf 6.6.2024)
- [23] Kuhn, W. (1989): *Die Lorentz-Kraft als relativistischer Effekt*. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik 1/38, S. 28-295
- [24] Kuhn, W. (1997): *Einsteins Deutung der Lorentz-Kraft als relativistischer Effekt*. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik 2/46, S. 2-5, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln
- [25] Kaden, H. (1959): *Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik*, 2. Auflage, Springer Verlag Berlin Göttingen (Kapitel C 3) ISBN 978-3-662-30232-3
- [26] Wolfsperger, H.A. (2008), *Elektromagnetische Schirmung, Theorie und Praxisbeispiele*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (Kapitel 3.1.3.3), ISBN 978-3-540-76912-5
- [27] Pfaff, Ann-Cathrine (2010): *Elektrische Wirbelfelder: Induktionsexperimente für Schule und Hochschule*, Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes
- [28] Siebenpfeiffer, Nina (2021): *Induktionsexperimente mit magnetisch abgeschirmten Leitern*, Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes

### Danksagung

Wir danken den Physiklehrern Willi Göbel und Florian Hewener für vielfältige Diskussionen und Anregungen.

Finanziell gefördert wurde die Arbeit im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung des BMBF (Projekt SaLUt II, Teilprojekt „Frühzeitige Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehramtsausbildung der Physik“).

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium  
für Bildung  
und Forschung

