

## Der Blick ins Becken

Perspektivische Effekte und Bildverzerrungen in einfachen Situationen mit optisch dichten Medien

Florian Theilmann\*

\*Physikdidaktik, Institut für Physik und Astronomie, Universität Potsdam, [florian.theilmann@uni-potsdam.de](mailto:florian.theilmann@uni-potsdam.de)  
(Eingegangen: 14.01.2010; Angenommen: 22.06.2010)

### Kurzfassung

Die Essenz der Brechung von Licht an der ebenen Grenzfläche zwischen Luft und Wasser beim Blick in ein Becken ist strahlenoptisch das Snellius'sche (Brechungs-)Gesetz. Dieses Thema ist auch normalerweise der zentrale Inhalt im entsprechenden Physikunterricht. Dabei zeigen sich selbst bei einfachen Sichtgeometrien am Becken eine Reihe komplexer Effekte: Gegenstände erscheinen dem Beobachter verzerrt oder am falschen Ort etc. Der vorliegende Beitrag hat in diesem Zusammenhang zwei Anliegen: Inhaltlich wird eine Reihe von Effekten so diskutiert, dass eine Art "Kurs" entsteht, bei dem der Abstraktionsgrad und der Schwierigkeitsgrad der verwendeten mathematischen Methoden vom Mittelstufenniveau zum Niveau der gymnasialen Oberstufe ansteigt. Methodisch besteht dabei ein besonderes Interesse daran, diese Diskussion sowohl mit Methoden der geometrischen Optik als auch im Rahmen einer systematischen Behandlung von "Ansichten" zu führen.

### 1. "Brechung" vs. "Hebung"

An einem gefüllten Becken oder Brunnentrog erscheint das Wasser weniger tief, als es tatsächlich ist. Identische Gläser, die mit unterschiedlichen Mengen Wasser gefüllt sind, zeigen – ebenso wie Wellen, die über Kiesel am flachen Ufer spielen – dass der Boden oder Untergrund umso näher am Betrachter erscheint, je mehr Wasser darüber steht (Abb. 1): Wir begegnen optischen Phänomenen, die oft unter "Hebung" zusammengefasst werden. Physiklerner mögen mit derlei Erfahrungen mehr oder weniger vertraut sein, wenn sie im Optikunterricht dem Thema Brechung begegnen. Wie lassen sich aber die Einsichten der geometrischen Optik auf das beziehen, was alltägliche Seherfahrung ist oder gezielt gesuchtes Experiment werden kann? In dieser Frage stehen sich zwei Arten optische Phänomene zu erfahren gegenüber: eine formale, eher mathematische Behandlung von "Licht" als äußerlich darstellbarem Sachverhalt in "abgelöster" Perspektive und eine systematische Diskussion von "Ansichten" oder "Bildern", die "subjektiv", "eingebunden" erfahren werden. Das physikalische Interesse an eingebundenen Erfahrungen ist typisch für phänomenologische Ansätze zum Physikunterricht und lässt sich zwanglos bis zu Goethes gerade 200 Jahre alt gewordenen Beiträgen zur Farbenlehre zurückverfolgen. Man muss allerdings kein Verfechter phänomenologischer Zugänge zur Optik sein, um den didaktischen Wert der Frage nach eingebundenen Experimenten anerkennen zu können – die Integration lebensweltlicher Erfahrungen und Kontexte, das Potential für motivations- und interessesteigernder

Experimente, die vielfältigen Ansatzpunkte für Themen des Themenkreises „Nature of Science“, dies und mehr ließe sich zugunsten einer "Optik der Bilder" [1] anführen.

Solche Zugänge zur Optik sind auch fachlich interessant, obwohl im Zusammenhang mit phänomenologischen<sup>1</sup> Unterrichtsansätzen immer wieder das Vorurteil oder Missverständnis auftaucht, dass dabei nicht "wirkliche Physik" gesucht würde. Dem ist nicht nur zu widersprechen, sondern gerade die Doppelperspektive auf abgelösten und eingebundenen Sachverhalt bietet die Möglichkeit vielfältiger Vertiefungen [3, 4] des Verständnisses und der Behandlung der Optik im Unterricht – auch auf akademischem Niveau<sup>2</sup>. Hierzu möchte der vorliegende Text beitragen: Wie lässt sich die (gehobene) Ansicht am wassergefüllten Becken qualitativ und quantitativ besser verstehen? Oder umgekehrt: Welche Effekte hat die Brechung auf die Ansicht dessen, was unter Wasser ist? Die Spanne der behandelten Themen hat durchaus "Kurscharakter" und reicht dabei von "elementar" (Sek-I-Niveau) bis zu Themen, die unter Einbezug von Infinitesimalrechnung und analytischer Geometrie behandelt werden.

<sup>1</sup>M. von Mackensen verwendet auch die missverständliche Bezeichnung "modellfrei" [2].

<sup>2</sup>Vgl. neben [1, 2], die nicht nur viele wichtige Themen der Optik unterrichtstauglich behandeln, sondern auch erkenntnistheoretische Fragen explizit behandeln, auch [5–9].

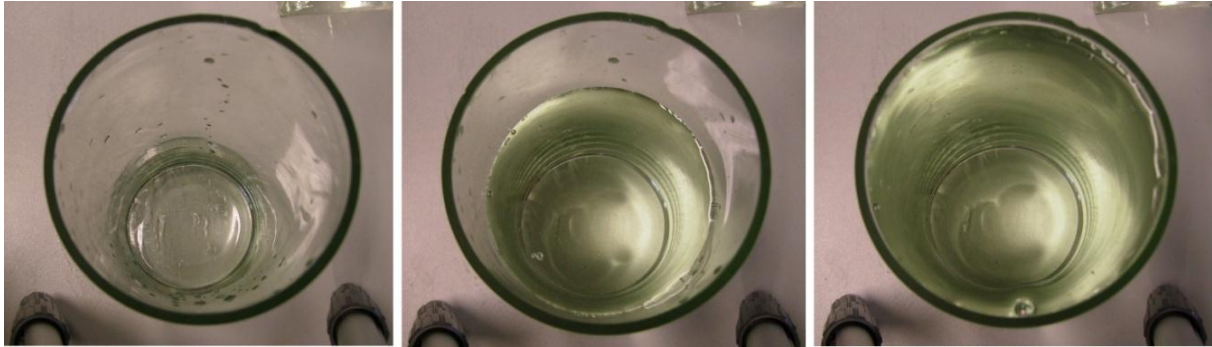


Abb. 1: Der Boden eines Wasserglases erscheint umso näher, je mehr Wasser im Glas ist.

## 2. Elementare Beobachtungen: Sichtverbindung auf Umwegen

Die Hebung korrespondiert zu den immer wieder aufs Neue eindrucksvollen Schwierigkeiten, ein Objekt unter Wasser mit einer geradlinigen Bewegung zu treffen (“Harpunieren”) oder den u. U. buchstäblich schwindelerregenden räumlichen Verhältnissen, mit denen man es bei einer genaueren Inspektion der Sichtverhältnisse am gefüllten Aquarium zu tun bekommt. Unsere gewohnte Urteilsgrundlage über das “Wo und Wohin” der Dinge trägt nicht mehr, obwohl das optisch dichte Medium nur durch eine ebene Grenzfläche von uns getrennt ist. Der – von der Seite gesehen – ebene Boden eines gefüllten Troges oder Beckens<sup>3</sup> erscheint dem Betrachter, der von oben ins gefüllte Becken schaut, zu ihm hin geneigt. Dieser Effekt nimmt zu, wenn der Betrachter in die Knie geht oder auf andere Weise ein flacherer Einblick ins Becken zustande kommt – der Boden ist auch nicht mehr “gerade”, die ganze Geometrie erscheint zunehmend verzerrt (Abb. 2 unten). Wenn zwei Betrachter auf gegenüberliegenden Seiten eines Wasserbeckens dieses Urteil fällen, wird deutlich, dass die Wirkung der Grenzfläche von den geometrischen Verhältnissen zwischen Betrachter und Grenzfläche abhängt, sie ist “lokal”, soll heißen: für jeden Beobachter anders. Werfen wir nun einen ersten Blick darauf, wie die Brechung diese Bildeffekte erzeugt und wie sich die Lichtwege im Bild darstellen lassen.

Bereits [1] beschreibt, wie die Brechung von Licht den Eindruck eines gehobenen Blickziels erzeugt. Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  der Sichtverbindung in Luft bzw. im Wasser zum Lot der Grenzfläche sind bekanntlich über das Snellius’sche Brechungsgesetz  $\sin\alpha/\sin\beta=n$  mit dem Brechungsindex  $n$  verknüpft. Die Sichtverbindung bzw. die Blickrichtung ist demgemäß unter Wasser steiler orientiert als in Luft (Abb. 2 oben); ein genau senkrechter Einblick bleibt allerdings senkrecht. Die verschiedenen Blickrichtungen in Luft und in Wasser definieren dabei eine senkrechte Blickebene (die die Punkte EAA’

enthält). Bei aufrechtem Kopf und zweiäugiger Sicht schneiden sich die Blickebenen der beiden Augen in der Geraden  $g$ , so dass die scheinbare Position A’ des Blickziels A tatsächlich in diesem Sinn senkrecht über A gesehen wird. Zugleich gilt damit offenbar  $EA/EA'=n$ , die *scheinbare* Länge der Sichtverbindung von der Einblickstelle E nach A’ in Wasser ist also um einen Faktor  $1/n$  kürzer als die tatsächliche Länge EA.

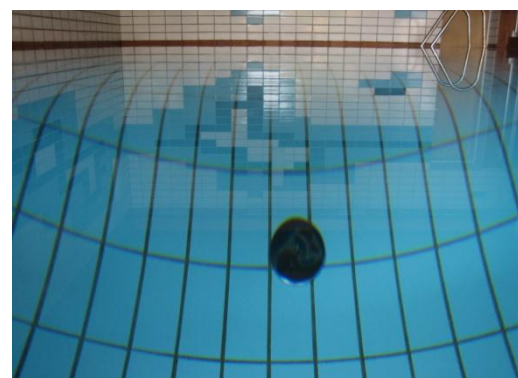
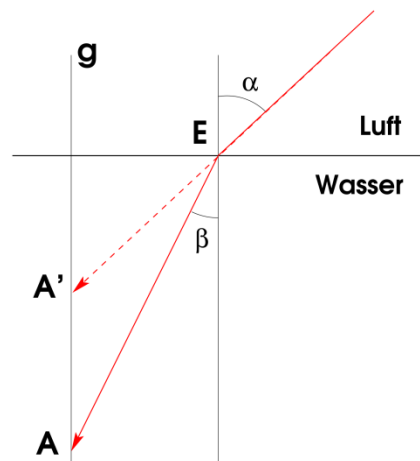


Abb. 2: Oben: Die Brechung des Lichtes an der Grenzfläche zum optisch dichten Medium führt dazu, dass das Blickziel A höher erscheint als es im Lageraum zu ertasten wäre, es wird in Richtung EA’ gesehen, vgl. Text. Unten: Starke Hebung geht mit drastischer Verzerrung der Sichtgeometrie einher (Bild von Udo Backhaus).

<sup>3</sup>Diese Situation wollen wir im Folgenden für unsere Betrachtungen voraussetzen.

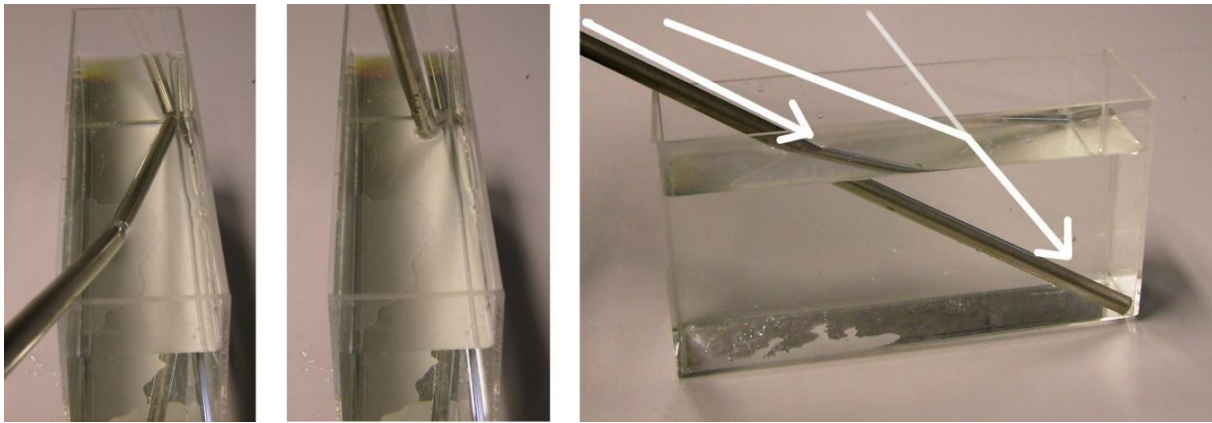


Abb. 3: Beobachtungsreihe zum Verlauf der Sichtverbindung beim Einblick ins Becken

Kaum diskutiert ist die umgekehrte Frage: “Was sehe ich von der Sichtverbindung zwischen Auge und Punkten auf dem Beckenboden?” Ausgehend vom Fermat’schen Prinzip wird klar, dass sich die optische Gesamtweglänge verkürzen lässt, wenn der Weg in Luft verlängert, dafür aber Wegstrecke im optisch dichten Medium eingespart wird, vgl. [1, 10]. Der gebrochene Lichtweg verläuft also in einer Ebene, die die direkte Verbindung Auge–Blickziel enthält. Abb. 3 zeigt, wie sich die Sichtverbindung nachvollziehen lässt: Das Bild der hinteren rechten Beckenecke erscheint im linken Bild nicht in der Verlängerung des näheren Teils der Stativstange (die ja dort endet), sondern *oberhalb*, also unter flacherem Einblickwinkel. Im mittleren Bild wird die Stange deutlich *steiler* gehalten und steht dann gerade so, dass wir *unter Wasser* an der Stange entlang zur Ecke schauen. Daraus ergibt sich der Verlauf der gesamten Sichtverbindung (rechtes Bild).

### 3. Vertiefung: Perspektivische Vergrößerung durch Brechung

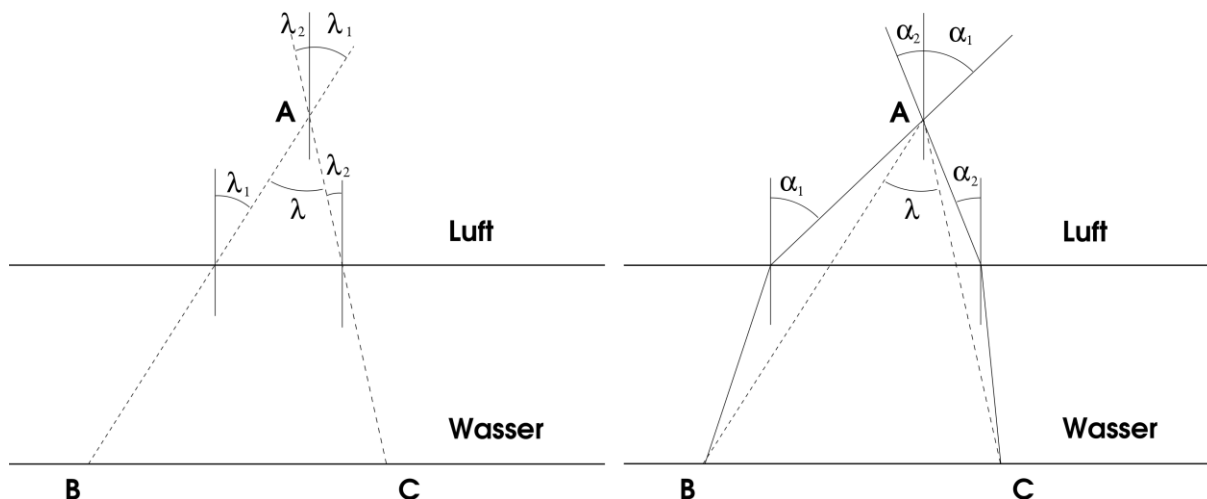
Die geschilderten Sachverhalte bieten für den Lerner vielfältige Anlässe zur Verwirrung: Brechung sorgt dafür, dass Sichtverbindungen unter Wasser steiler verlaufen als in Luft, zugleich erscheint das Becken flacher als es ist; beim Einblick ins Wasser ist die optische Weglänge bei gleicher geometrischer Entfernung gegenüber Luft im optisch dichten Medium (um den Faktor  $n > 1$ , den Brechungsindex) länger, andererseits erscheint der Boden eines Beckens mit Wasserfüllung näher als in Luft bzw. ist der scheinbare Abstand zwischen Einblickstelle und Blickziel gerade um  $1/n$  verkürzt... Im vorherigen Abschnitt haben wir untersucht, wie sich die qualitativen Änderungen der Blickrichtungen darstellen und nachvollziehen lassen. In diesem Abschnitt soll anhand des bisher in der Literatur vernachlässigten Blickwinkels auf *perspektivische Effekte* ein Untersuchungsgang dazu skizziert werden, wie der Eindruck des “Näher-als-in-Luft” entsteht.

“Brechung” ist zunächst eine Aussage über Blickrichtungen. Oben hatten wir uns bereits überlegt, dass Brechung dazu führt, dass der Abstand Blickziel–Einblickstelle scheinbar verkürzt wird. Das Urteil, der Beckenboden erscheine mit Wasser “nä-

her”, meint aber etwas anderes: ein Blickziel unter Wasser sieht nicht “näher aus als in Luft” (oder: “näher, als sich beim Hineinfassen herausstellt”), weil sich die Blickrichtung – für die uns der Vergleich ja sogar fehlen mag – geändert hat oder Abstände “in Blickrichtung” – die wir vielleicht gar nicht beurteilen – verkürzt wären, sondern weil ein *vergrößerter Sehwinkel* (als in Luft) auf Kanten, Umrisse oder sonstige Merkmale des angeschauten Etwas scheinbare Nähe verheißt. Untersuchen wir also die Vergrößerung des Blickwinkels beim Blick durch die Wasseroberfläche näher.

Abb. 4 zeigt einen Vergleich zwischen den Blickwinkeln auf einen Abschnitt BC, wenn das “Auge” (i. e. der perspektivenrelevante Beobachterstandort) A über dieser Strecke liegt. Die linke Abbildung zeigt den Blickwinkel  $\lambda$ , wie er sich ohne optisch dichtes Medium ergäbe – wir sprechen für diesen Fall im Folgenden auch vom “Lagewinkel”  $\lambda$ . Mit Medium erfolgt der Blick AB bzw. AC auf “Umwegen”, der Winkel zur Grenzflächennormalen vergrößert sich auf der Luftseite. Der resultierende Blickwinkel  $\alpha$  von A aus auf BC ist die Summe der beiden Winkel zu den Oberflächennormalen, so dass sich tatsächlich ein vergrößerter Sehwinkel bzw. eine perspektivische Vergrößerung ergibt.

Solche Überlegungen erlauben eine altgediente Fehlvorstellung zu beheben. Ein bekanntes Einführungs-experiment in den Themenkomplex Brechung/Hebung ist das Folgende: Eine Geldmünze wird in einem gefüllten Glas versenkt und man vergleicht die scheinbare Größe dieser Münze mit einer zweiten Münze, die in Luft neben das Glas gehalten wird. Für einen vergleichbaren Größeneindruck muss man die Münze in Luft ein Stück heben. Abmessen, etwa mit einem Lineal, ergibt, dass sich die tatsächliche Wassertiefe  $t$  der versenkten Münze und die scheinbare Tiefe  $t'$  der Vergleichsmünze (also ihr Abstand zum Niveau der Wasseroberfläche) recht genau nach  $t/t' = n$  verhalten (mit der optischen Dichte  $n$ ). Dieser Sachverhalt demonstriert aber eben *nicht* eine Verkürzung des (scheinbaren) Abstandes zwischen Einblickstelle und gehobenem Blickziel, sondern eine Vergrößerung des Blickwinkels auf die Münze (vgl. Abb. 5 links).



**Abb. 4:** Links: Der Blickwinkel  $\alpha$  von A auf die Strecke BC wäre an Luft  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Rechts: Der tatsächliche Blickwinkel von A auf die Strecke BC ist (mit Wasserfüllung) wegen  $\alpha_1 > \lambda_1$  und  $\alpha_2 > \lambda_2$  dann  $\alpha_1 + \alpha_2 > \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ , also größer als in Luft.

Zur Behandlung reicht es, den Winkel zwischen der Normalen der Wasseroberfläche (Richtung AC) und beispielsweise dem Rand der Münze (B) zu betrachten. Die Sichtverbindung AB ist an der Grenzfläche gebrochen, der Sehwinkel auf das "Objekt" (oder den "Abschnitt") BC ist vergrößert – in welcher Tiefe  $t'$  hätte ein direkt gesehenes Objekt B'C' die gleiche scheinbare Größe, also den gleichen Sehwinkel? Es gilt offenbar:

$$b = h \cdot \tan \alpha + t \cdot \tan \beta \quad \{1\}$$

bzw.

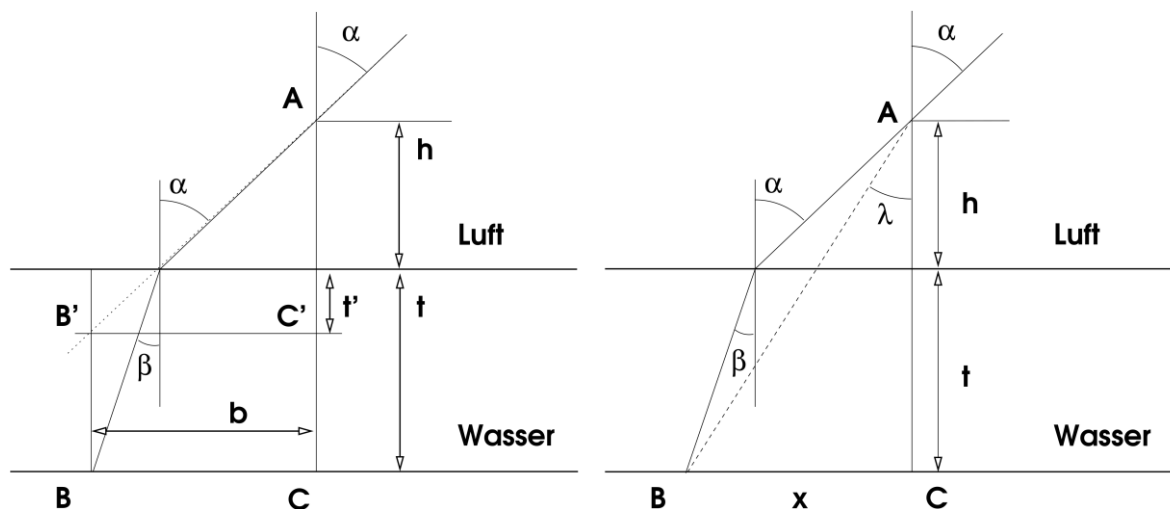
$$b = (h + t') \cdot \tan \alpha \quad \{2\}$$

Für hinreichend kleine Winkel gilt  $\tan \alpha \approx \sin \alpha$  bzw.  $\tan \beta \approx \sin \beta$ , und wegen des Brechungsgesetzes  $\sin \beta = \sin \alpha / n$ . Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. 1 ergibt dann  $b = (h + t/n) \cdot \tan \alpha$ , der Vergleich mit Gl. 2 also das empirisch gefundene  $t' = t/n$ .

Die Darstellung aus Gl. 1 erlaubt es, den Themenkomplex "Blickwinkel" analytisch zu behandeln. Im Folgenden bezeichnet  $\lambda$  wieder den (hypothetischen) Blickwinkel "ohne Wasser" bzw. den Lagewinkel,  $\alpha$  den (tatsächlichen) Blickwinkel "mit Wasser". Der Winkel  $\lambda$  ist dabei ein Maß für den tatsächlich tastbaren sagittalen Abstand  $x$  des Blickziels vom Beobachter – und  $\alpha$  hängt ebenfalls von  $x$  ab. Die Eindeutigkeit der Abbildung zwischen  $\lambda$  und  $\alpha$  – wir würden sonst *mehrere* Bilder eines Blickziels durch die Grenzfläche sehen, oder bestimmte Bereiche des Beckenbodens blieben unsichtbar – lässt sich rechnerisch nachvollziehen: Wenn wir  $h$  als Höhe von A über der Grenzfläche und  $t$  als Dicke der optisch dichteren Schicht ansetzen (Abb. 5 rechts), ergibt sich:

$$x = \tan \lambda \cdot (h + t) = \tan \alpha \cdot h + \tan \beta \cdot t \quad \{3\}$$

Damit ist z. B.:



**Abb. 5:** Links: Der Sehwinkel von A durch eine Wasserschicht der Tiefe  $t$  auf den Streckenabschnitt BC sei  $\alpha$ . Dies entspricht der Sicht ohne Wasser auf einen Streckenabschnitt B'C' im Abstand  $t'$  unter dem Niveau der Wasseroberfläche. Rechts: Skizze zur analytischen Beziehung zwischen Sehwinkel  $\alpha$  und Lagewinkel  $\lambda$ .

$$\lambda(\alpha) = \tan^{-1}(\tan \alpha \cdot h + \tan \beta \cdot t / (h+t)) \quad \{4\}$$

darstellbar und könnte Anlass für eine Anwendung von wichtigen Sätzen aus der Infinitesimalrechnung außerhalb der Analysis sein. Auch andere Fragen lassen sich daran anschließen, etwa: "Vergrößert sich der Sehwinkel auf einen Gegenstand oder Abschnitt unter Wasser *in jedem Fall?*" Eine solche Frage ist reizvoll, weil sie die höchste Anforderungsstufe des Kompetenzbereichs "Erkenntnisgewinnung" tangiert. Für die Behandlung müsste man den Blickwinkel  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  (o. B. d. A. sei  $\lambda_2 > \lambda_1$ ) ohne Wasser auf einen sagittal orientierten Abschnitt am Beckenboden und den Blickwinkel mit optisch dichterer Schicht  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  vergleichen. Zwar gelten  $\alpha_i = \alpha_i(\lambda_i)$  und  $\alpha_i > \lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), aber gilt auch

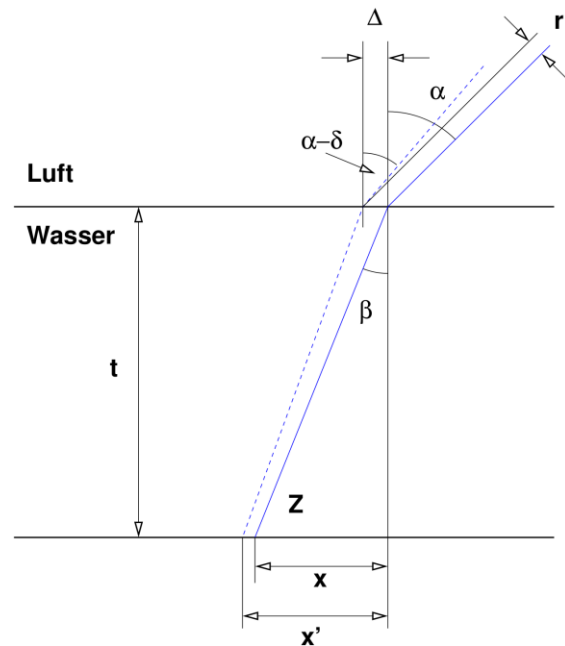
$$\Delta\alpha > \Delta\lambda \dots? \quad \{5\}$$

Wir werden in Abschnitt 5 ein anschauliches geometrisches Argument für das Zutreffen von Gl. 5 geben.

#### 4. Ergänzung: Ein genauerer Blick auf die realen Modalitäten des Einblicks

Der Physikdidaktiker Andreas Müller hat in einem persönlichen Gespräch kritisiert, dass Überlegungen wie in Abschnitt 3 implizit eine wesentliche Grundtatsache des Sehens vernachlässigen: Das Auge bildet nicht eine einzelne Blickrichtung oder einen einzelnen Strahl, sondern einen kleinen, aber nicht verschwindenden Raumwinkel ab. Dies könnte ein Lernhindernis darstellen. Obwohl es als Erfahrungstatsache gelten mag, dass Überlegungen mit *einer* Blickrichtung die erfahrbare Wirklichkeit gut abbilden, wäre es wünschenswert, die Abbildungsverhältnisse *explizit und quantitativ* zu diskutieren. Die korrespondierende fachliche Lücke soll in diesem Abschnitt so geschlossen werden, dass es mit Schülern nachvollzogen werden kann: Wir schätzen strahlenoptisch das örtliche Auflösungsvermögen der Abbildungssituation beim Einblick ins Becken ab.

Betrachten wir ein konvergentes Strahlenbündel mit Öffnungswinkel  $2\delta$ , dessen "Zentral- oder Hauptstrahl" unter dem Winkel  $\alpha$  auf die Wasseroberfläche des Beckens trifft (Abb. 6). Dieses Strahlenbündel stellen wir uns als von einem Bildpunkt im Auge des Beobachters ausgehend vor, das auf die Stelle Z (Auftrittsstelle des Zentralstrahls auf dem Beckenboden) akkomodiert ist. Offenbar werden in der Sagittalebene oberhalb und unterhalb des Zentralstrahls liegende Strahlen beim Durchgang durch die Wasseroberfläche an anderen Stellen und unter anderem Winkel gebrochen, so dass die Konvergenz in Z nicht mehr unbedingt gilt – wir wollen die daraus resultierende sagittale Größe des Urbildbereiches abschätzen. Dabei sei  $r$  der seitliche Versatz des Randstrahls gegenüber dem Hauptstrahl bei der Brechung,  $\Delta$  der Abstand der Einblickstellen von Randstrahl und Hauptstrahl.



**Abb. 6:** Zur Ortsauflösung beim Einblick ins Becken: Der Hauptstrahl (blaue durchgezogene Linie) trifft in Z auf den Beckenboden. Der Randstrahl des durch die Pupille gehenden Strahlenbündels (blaue gestrichelte Linie) trifft die Wasseroberfläche im Abstand  $\Delta$  und unter dem Winkel  $\alpha - \delta$ . Wir interessieren uns für  $\Delta x := x' - x$ .

Offenbar gilt:

$$\frac{r}{\Delta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \{6\}$$

Der Randstrahl trifft die Wasseroberfläche unter einem Winkel von  $\alpha - \delta$  und den Beckenboden im Abstand  $\Delta x := x' - x$  vom Hauptstrahl. Die beiden Strahlen haben in Wasser die Winkel  $\beta = \sin^{-1}(\sin(\alpha) / n)$  bzw.  $\beta' = \sin^{-1}(\sin(\alpha - \delta) / n)$  zum Lot der Wasseroberfläche.

Dann sind:

$$x = t \cdot \tan \beta \quad \{7\}$$

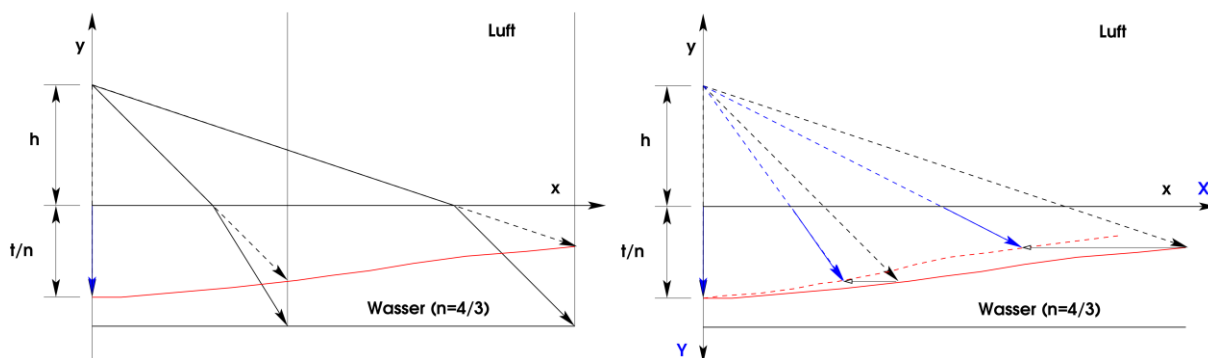
$$x' = \Delta + t \cdot \tan \beta'. \quad \{8\}$$

Um  $\Delta x$  auszuwerten, nehmen wir eine Reihe von Abschätzungen vor. Der Öffnungswinkel  $\delta$  des Strahlenbündels entspricht etwa dem Verhältnis von Pupillenradius des beobachtenden Auges zum Abstand Auge–Blickziel, ist also recht klein. Damit ist (wir entwickeln in eine Taylorreihe um  $\sin(\alpha) / n$ ):

$$\begin{aligned} \beta' &\approx \sin^{-1}(\sin(\alpha) / n) \\ &- \frac{\delta}{\sqrt{1 - (\sin(\alpha) / n)^2}} = \quad \{9\} \\ &= \beta - \frac{\delta}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

Wir setzen  $\delta' := \delta / \cos \beta$  und erhalten:

$$\tan \beta' \approx \tan(\beta - \delta') = \frac{\tan \beta - \tan \delta'}{1 + \tan \beta \cdot \tan \delta'}. \quad \{10\}$$



**Abb. 7:** Die Hebungskonchoide: Links zeigt die rote Linie schematisch die Position des Beckenbodens, wie sie sich bei senkrechter Hebung gemäß des Snellius'schen Gesetzes ergibt. Rechts der Übergang auf die neuen Koordinaten  $X$  und  $Y$ : Die  $X$ -Skala ist gegenüber der  $x$ -Skala kontrahiert, die Länge der durchgezogenen blauen Pfeile ist in allen Blickrichtungen gleich, vgl. Text. Der „Versatz“ zwischen  $x$ - und  $X$ -Koordinate ist proportional zu  $x$ .

Auch  $\delta'$  ist ein recht kleiner Winkel, denn  $\cos\beta$  kann nicht kleiner werden (Grenzfall  $\alpha \rightarrow \pi/2$ ) als  $\cos(\sin^{-1}(1/n)) \approx 2/3$ . Mit  $\tan\delta' \approx 0$  reduziert sich Gl. 10 zu  $\tan\beta' \approx \tan\beta$ . Insgesamt erhalten wir in dieser Näherung:

$$\Delta x \approx \Delta = \frac{r}{\cos\alpha}. \quad \{11\}$$

Wir erhalten eine anschauliche Faustregel: *Die Ortsunschärfe des Urbildes ist – für nicht zu flachen Einblick – von der gleichen Größenordnung des Pupillradius des beobachtenden Auges.*

Eine Reihe von Beobachtungen stützen dieses Ergebnis: Wie wenig die Effekte ausgedehnter Strahlenbündel die Urteile über scheinbare Nähe/Lage von Blickzielen berühren, zeigt der Blick durch *pinholes*, die den Querschnitt des Strahlenbündels künstlich reduzieren. Die Frage, ob und ggf. wo abbildende Strahlenbündel auf der Urbildseite konvergieren (vgl. die Diskussionen in [11] oder [12]) scheint für die in Abschnitt 3 diskutierten Effekte bestenfalls zweitrangig – es kommt für Richtungs- und Entfernungsurteile normalerweise zunächst und vor allem auf die *Konvergenz der Sehachsen* der beiden Augen an (siehe auch [13]). Das Auftreten von Farbsäumen an transversalen Kanten in kontraststarken Mustern auf dem Beckenboden legt zudem nahe, dass die *konkurrierende Unschärfe* aufgrund von Dispersion ähnlich groß (oder größer) ist.<sup>4</sup> Offenbar ist es keine unzulässige Ungenauigkeit, beim Einblick ins Becken sich für die Diskussion der Brechungseffekte auf diese Achsenrichtungen zu beschränken. Für Distanzen jenseits

<sup>4</sup>Die hier besprochene „Urbild-Unschärfe“ wird Kontraste bzw. Kanten verwischen und es darum *schwerer* machen, Farbsäume zu sehen. Die fragliche Abbildungsunschärfe macht sich also bei schlechter Beleuchtung (große Pupille!) und flachem Einblick (i. e.  $\cos\alpha \rightarrow 0$ ) dadurch bemerkbar, dass sie die Farbsäume verschwinden lässt! Für einen Vergleich von „Unschärfe durch Dispersion“ und „Unschärfe durch  $\delta > 0$ “ siehe auch das überraschend scharfe Bild bei Beleuchtung des Beckenbodens mit einer hellen Na-Spektrallampe.

der ausgestreckten Arme ist dann sogar „zyklopi-sches“, also ein scheinbar einäugiges, reines Richtungssehen eine gute Näherung [13].

### 5. Komplexe Probleme: Die Hebungskonchoide

Unter diesen Voraussetzungen ist ein weiterer Untersuchungsschritt möglich: die quantitative Analyse der Verzerrung. Wie viel Raum man einem solchen Thema in der Oberstufenphysik einräumen wird, sei dahingestellt – das wesentliche Werkzeug, die *Hebungskonchoide* wurde jedenfalls als Vertiefungsthema im Hinblick auf das Abitur entwickelt [14] und die Physik ist spannend. Wir entwickeln hier diese Diskussion vor allem in geometrischer Hinsicht weiter, wodurch es – ähnlich wie in den vorherigen Abschnitten für die Infinitesimalrechnung – auch für den Mathematiklehrer interessant werden mag.

Bei flacher Einsicht ins Becken entspricht der Gesamteindruck des durch die Brechung verzerrten Beckenbodens einer Art Wanne (Abb. 2 rechts, vgl. aber auch [15]), die *scheinbare Position* eines Bodenpunktes beim Blick auf den Beckenboden durch eine Wasserschicht lässt sich analytisch angeben:<sup>5</sup> Da die Brechung nur Richtungsänderungen der Lichtwege in sagittaler Richtung bewirkt, reicht es aus, die scheinbare Höhe  $y$  eines Bodenpunktes (bezogen auf das Niveau der Wasseroberfläche) in Abhängigkeit vom Abstand  $x$  des Bodenpunktes von einem Punkt auf dem Beckenboden senkrecht unter dem Beobachterstandpunkt anzugeben:  $x$  und  $y$  genügen der Konchoidengleichung:

$$\frac{y^2}{(y+h)^2} \cdot x^2 \cdot \frac{n^2-1}{n^2} + y^2 = \frac{t^2}{n^2} \quad \{12\}$$

Dabei sind  $h$  und  $t$  wiederum die Höhe des Beobachters über der Wasseroberfläche bzw. die Tiefe des Beckens und  $n$  der Brechungsindex des optisch dichteren Mediums.

<sup>5</sup>Die Darstellung (12) in [14] verdanken wir dem Kasseler Mathematiklehrer Peter Baum, die Herleitung wird in der frei zugänglichen Dissertation von Pascal Guderian referiert [16].

Als neuen Schritt wollen wir diese Gleichung noch genauer geometrisch auswerten und interpretieren. Die Koordinatentransformation

$$X = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}x, \quad Y = y + h \quad \{13\}$$

führt Gl. 12 in die (kartesische) Normalform der Konchoidengleichung über:

$$(Y - h)^2(X^2 + Y^2) = \frac{t^2}{n^2}Y^2 \quad \{14\}$$

Der Pol dieser Konchoide entspricht der Beobachterposition, die Skala der  $Y$ -Achse ist im Vergleich zur  $y$ -Skala um  $h$  nach unten verschoben, die  $X$ -Skala ist im Vergleich zur  $x$ -Skala kontrahiert. Abb. 7 zeigt schematisch beide Kurven: links die "real gesehene" Konchoide im  $(x, y)$ -System (die sich aus der nur scheinbar geradlinigen Sichtverbindung zu Punkten auf dem Beckenboden ergibt), rechts gestrichelt die Konchoide im  $(X, Y)$ -System.

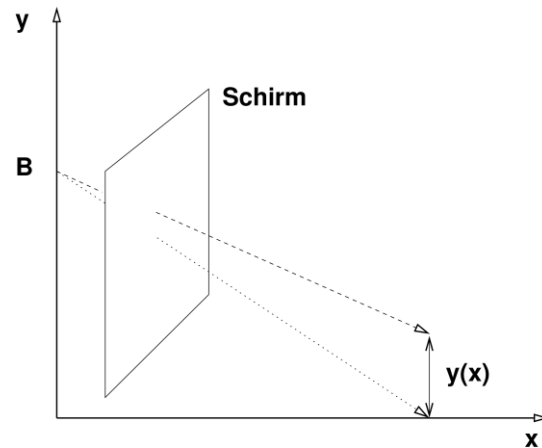
Aus dieser Konstruktion ergeben sich einige neue Folgerungen. Zunächst ergibt sich eine anschauliche Antwort für die in Gl. 5 formulierte Frage danach, ob ein sagittal orientierter Abschnitt immer vergrößert erscheint: Die Hebungskonchoide stellt den scheinbaren Ort dar, an dem Punkte des Beckenbodens in bestimmtem Abstand gesehen werden, und sie ist überall zum Beobachter hin geneigt – ein sagittaler Abschnitt entspricht also zwei Punkten auf der Konchoide mit demselben  $\Delta x$ , der Abschnitt ist zum Betrachter hin geneigt, erscheint also immer länger als ohne Wasser.

Der Übergang von  $(x, y)$ -Koordinaten zur Normalform in  $(X, Y)$ -Koordinaten bedeutet geometrisch, dass wir auf ein Bezugssystem wechseln, in dem die Wasseroberfläche die Leitgerade und die Höhe des Beobachters über der Wasseroberfläche unverändert  $h$  ist. Im  $(X, Y)$ -System liegt das scheinbare Bodenprofil dann gerade so, dass der Abstand zwischen Wasseroberfläche und Boden für jede "Blickrichtung" des Beobachters  $t/n$  beträgt. Umgekehrt lässt sich dieser "Erhaltungssatz" auch als einfache Konstruktionsregel für die scheinbare Lage des Beckenbodens im  $(X, Y)$ -System lesen. Für das  $(x, y)$ -System ergibt sich die real gesehene Hebungskonchoide durch Streckung der  $x$ -Skala um einen konstanten Faktor  $c$  gegenüber der  $X$ -Skala, wobei offenbar fernere Konchoidenpunkte um größere Strecken "in die Ferne gerückt werden" als nahe (vgl. die waagrechten Verschiebungen in Abb. 7 rechts). Auch dieser Faktor lässt sich geometrisch interpretieren. Mit den Werten für "streifenden Einblick" ( $\alpha \rightarrow 0$ ) ist  $n = 1/\sin \beta_s$  und damit

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta_s} = \cos \beta_s \end{aligned} \quad \{15\}$$

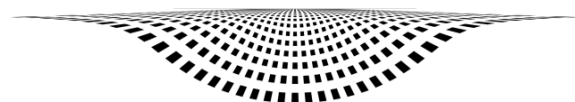
Streifender Einblick heißt dabei "sehr große  $x$ -Werte für die Einblickstelle und praktisch waagrechte Sicht-

trichtung". Die scheinbare Entfernung des Blickziels von der Wasseroberfläche ( $= t/n$  im  $(X, Y)$ -System) nimmt also im  $(x, y)$ -System für  $\alpha \rightarrow \pi/2$  gerade um einen Faktor  $c$  zu. Dieser Faktor entspricht dem Verhältnis von tatsächlicher Wassertiefe  $t$  und dem Abstand Einblickstelle–Blickziel auf den Beckenboden unter einem Winkel  $\beta_s$  der Sichtverbindung.

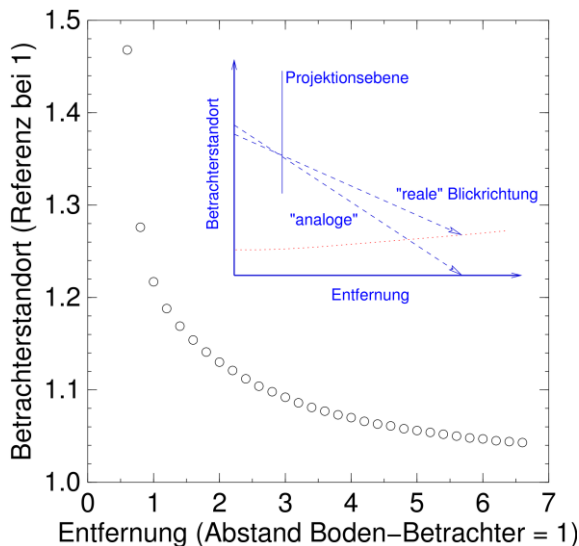


**Abb. 8:** Die Konstruktion der Zentralprojektion von gehobenen Punkten des Beckenbodens. Von B aus werden Bildpunkte auf einem Schirm markiert. Die gepunktete Linie zeigt den Verlauf der Sichtverbindung bei direkter Sicht, die gestrichelte Linie den Verlauf für den um  $y(x)$  gehobenen Bodenpunkt.

Mit der durch die Hebungskonchoide gegebenen scheinbaren Lage des Beckenbodens lassen sich durch Zentralprojektion leicht "virtuelle Ansichten" der Situation erstellen (Abb. 8). Wir bringen zwischen "Beobachter" B und gehobenem Blickziel einen Schirm ein und markieren die Durchstoßpunkte von geeigneten Projektionsstrahlen auf dem Schirm. Solche Darstellungen sind spannend, weil sie die Beeinträchtigung durch die spiegelnde Wasseroberfläche vermeiden und sich numerisch auswerten lassen. Die Berechnung der Positionen dieser Bildpunkte ist elementare analytische Geometrie. Angewendet auf die Eckpunkte kleiner Kacheln ergeben sich plastische Bilder der Hebungsgometrie (Abb. 9) – hier ist der geometrische Abstand zwischen B und Beckenboden fast vollständig mit Wasser gefüllt. Die Hebungskonchoide begegnet uns dabei als das (von der Blickrichtung unabhängige) Profil einer scheinbaren Mulde im Beckenboden. In größerem Abstand scheint der Beckenboden direkt unter der Wasseroberfläche zu "kleben". Diese Ansicht ist dabei völlig analog zu Abb. 2 unten.



**Abb. 9:** Zentralprojektion eines nach Gl. 12 gehobenen Kachelmusters – vgl. auch Abb. 2 unten. Für einen möglichst realistischen Eindruck sollte die Horizontlinie auf Augenhöhe gehalten werden und der Betrachtungsabstand gut die halbe Bildbreite sein.



**Abb. 10:** Scheinbare Beobachterhöhe ( $h$  in Abschnitt 3) als Funktion des Abstandes  $x$  des angeschauten Beckenbodenpunktes. Die blaue Grafik erklärt die Konstruktion: Die „reale“ Blickrichtung ergibt sich als direkte Sicht auf den gehobenen Beckenboden. Von wo aus sähe man *ohne Wasser* einen bestimmten Bodenpunkt am gegebenen Bildpunkt? Diese Position ergibt die „analoge“ Blickrichtung. Die Längeneinheit ist der tatsächliche Abstand Beobachter-Beckenboden, der Abstand der Projektionsebene vom Beobachter ist dann 0.4, die Wassertiefe 0.7.

Eine letzte vertiefende Überlegung, die daran anschließt: Am ebenen Spiegel erscheinen für einen Beobachter im Spiegel Ansichten der Umgebung, die nicht nur „spiegelverkehrt“ sind, sondern auch zu einem anderen Blickwinkel gehören. In einer Optik der Bilder wird dieser Sachverhalt nicht als „Reflexion“ (etwa von Lichtstrahlen) diskutiert, sondern im Rahmen des „Spiegelraums“ – die jeweilige Ansicht im Spiegel lässt sich verstehen, wenn man sich an die Stelle des eigenen Spiegelbildes versetzt und nachvollzieht, was durch ein „Fenster“ am Ort des Spiegels zu sehen wäre. Die Spiegelansicht wird so *integral* verständlich [8] und das Reflexionsgesetz ergibt sich als Geometrisierung dieser Einsicht. Die Verzerrung des ebenen Beckenbodens durch die Brechung an der Grenzfläche nach Gl. 12 macht allerdings klar, dass sich die Ansicht eines gehobenen Beckenbodens nicht durch eine einfache Transformation – insbesondere nicht durch eine Translation des Beobachterstandpunktes – ergibt. Anders gesagt: Es gibt für einen gegebenen Beobachterstandort im Allgemeinen keinen zweiten Standort, von wo aus das *leere* Becken so aussieht, wie mir vom ersten Standort aus das *gefüllte* Becken erscheint.

Andererseits lässt sich fragen, ob nicht eine Art „schwache Analogie“ gilt, also ob etwa für *einzelne* kleine Kacheln im gefüllten Becken so ein „Ersatzstandpunkt“ näherungsweise angebbbar ist. Eine solche Überlegung hätte ihren didaktischen Wert im Kontext von Themenkreisen wie „Erkenntnisgewinnung“ und „*Nature of Science*“. Abb. 10 zeigt

das Ergebnis einer solchen Untersuchung. Für eine einzelne Kachel wird die Ansicht/Projektion des gehobenen Urbilds („reale Blickrichtung“) nicht als Hebungseffekt, sondern als senkrechter Positionswechsel von B interpretiert, so dass die nicht gehobene Kachel (Sichtsituation „leeres Becken“) gerade an der Stelle des Schirms liegt, an der sie mit gefülltem Becken erscheint („analoge Blickrichtung“). Abb. 10 zeigt die Abhängigkeit von „scheinbarer Beobachterhöhe“ und Entfernung des Blickziels. Wie nach Abb. 9 zu erwarten, macht sich der Effekt vor allem im näheren Umkreis des Beobachters geltend.

## 6. Schlussbetrachtung

Die Brechung von Licht an ebenen Grenzflächen zwischen Medien verschiedener optischer Dichte ist ein Thema, das formal relativ übersichtlich, in den Effekten auf die sich ergebenden Ansichten allerdings durchaus komplex ist. Die traditionelle oder „klassische“ Darstellung der Optik in diesen Fällen erfolgt aus abgelöster, strahlenoptischer Perspektive [17,18], die dann für den Schulgebrauch entsprechend elementarisiert wird. Vor allem aus didaktischen Motiven heraus wurden in den letzten Jahrzehnten daneben eingebundene, „bildoptische“ Zugänge entwickelt, die dabei durchaus auch quantitative Aspekte anspruchsvoll berücksichtigen, siehe etwa [14]. In beiden Linien ist das Verständnis für den Wert des jeweils anderen Zugangs inzwischen soweit gewachsen, dass eine Integration abgelöster und eingebundener Betrachtungsweisen und Experimente wünschenswert und möglich erscheint (vgl. etwa [3, 4]). Im vorliegenden Text wird die wohl einfachste „Brechungssituation“ in diesem Sinn für eine Reihe elementarer und weiterführender Fragestellungen diskutiert, wobei der Schwerpunkt in einem genaueren Verständnis davon, was „Hebung“ meinen kann, und in den Auswirkungen der brechenden Grenzfläche auf die perspektivischen Verhältnisse liegt. Das Anliegen ist, strahlenoptische Überlegungen an mögliche Beobachtungen aus der eingebundenen Perspektive anzuschließen (und *vice versa*), wobei hier nicht speziell ein Strahlenmodell von Licht vorausgesetzt wird, sondern die Strahlen typischerweise für konkrete Blickrichtungen, für Begrenzungen von Blickwinkeln oder allgemeiner für Lichtwege stehen. Die Anordnung der in diesem Text diskutierten Probleme versucht dabei einen zusammenhängenden Diskussionsbogen zwischen ursprünglicheren und raffinierten Aspekten des *Blicks ins Becken* zu schlagen. Die Vielfalt von möglichen Fragen, Bezügen, Methoden und Beobachtungen überrascht. Eine Auseinandersetzung lohnt sich deshalb trotz des scheinbar einfachen Themas.



## 7. Literatur

- [1] Georg Maier: *Optik der Bilder*. Kooperative Dürnau, 1993.
- [2] Manfred von Mackensen und Heinz-Christian Ohlendorf: *Modellfreie Optik*. Zur Physik der 12. Klasse. Pädagogische Forschungsstelle Kassel, 1998.
- [3] Wilfried Sommer und Nicholas Meinzer: Vom Kranz zum Beugungsbild – Untersuchung von Unordnungs-Ordnungsübergängen. *PhyDid*, 8(4), 104–111, 2009.
- [4] Florian Theilmann, Johannes Grebe-Ellis, und Matthias Rang: Lichtspuren im Wasser – Ein Experiment zum Verhältnis von Hebung und Brechung. *PhyDid*, 8(3), 86–91, 2009.
- [5] Johannes Grebe-Ellis and Florian Theilmann (Hrsg.). *Open Eyes 2005*. Tagungsband. Logos Verlag, Berlin, 2006.
- [6] Wilfried Sommer: *Zur phänomenologischen Beschreibung der Beugung im Konzept optischer Wege*. Logos Verlag, Berlin, 2005.
- [7] Johannes Grebe-Ellis: *Grundzüge einer Phänomenologie der Polarisation*. Logos Verlag, Berlin, 2005.
- [8] Florian Theilmann: *Der Gedanke im Kontext*. Zur Charakteristik einer erscheinungsorientierten Physik. *Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU)*, 61(4), 236–241, 2008.
- [9] Thomas Quick und Johannes Grebe-Ellis: *Wo wird das Bild einer unter Wasser liegenden Münze gesehen?* Vortrag (DD 18) auf der Frühjahrstagung der DPG 2010 in Hannover, 2010. Vgl. auch Beitrag in *Phydid B*.
- [10] Roger Erb: *Optik mit Lichtwegen*. Westarp Wissenschaften, Bochum und Magdeburg, 1994.
- [11] Antonio B. Nasser: Apparent depth. *The Physics Teacher*, 32, 526–529, 1994.
- [12] Helmut Dittmann und Werner B. Schneider: *Mit dem Computer ins Aquarium geschaut*. In *Wege in die Physikdidaktik*, Band 1, S. 226–236. Palm & Enke, Erlangen, 1989. <http://www.solstice.de/veroeffentlichungen/buchreihe-wege-in-der-physikdidaktik/band-1/wege-in-der-physikdidaktik-band1.html>
- [13] Wolfgang Metzger: *Gesetze des Sehens*. Waldemar Kramer, Frankfurt, 1975.
- [14] Johannes Grebe-Ellis, Wilfried Sommer, Jürgen Vogt: *Modellfreie Optik II – Hebung, Beugung und Polarisation*. Abituraufgaben. Pädagogische Forschungsstelle Kassel, 2002.
- [15] Marcel Minnaert: *Light and Colour in the Outdoors*. Springer, New York, 1999.
- [16] Pascal Guderian: *Wirksamkeitsanalyse außerschulischer Lernorte*. Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin, 2006. <http://edoc.hu-berlin.de/dissertationen/guderian-pascal-2007-02-12/PDF/guderian.pdf>
- [17] Heinz Niedrig (Hrsg.): *Bergmann–Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik*. Optik, Band 3. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.
- [18] Max Born: *Optik*. Eine Einführung in die elektromagnetische Lichttheorie. Springer, Berlin, 1970.